

Planeamento de Trajectórias usando Caminhos de Curvatura Contínua

Duarte C. Leão, Tiago C. Pereira, Pedro A. Lima e Luís M. M. Custódio
 dmecc1@yahoo.com, carvalhopereira@mail.telepac.pt, {pal, lmmc}@isr.ist.utl.pt
 Instituto Superior Técnico

Sumário - Este documento propõe um método de planeamento de caminhos de curvatura contínua em tempo real, usando uma trajectória composta por arcos de circunferência, segmentos de recta e clotóides. A sua aplicação destina-se ao movimento de um veículo autónomo no ambiente de uma pista de fórmula 1. O método descrito está a ser utilizado no ambiente de simulação RARS¹.

I. INTRODUÇÃO

O problema de planeamento de trajectórias surge em qualquer aplicação, que dispondo de um veículo, físico ou simulado, pretenda fazer uso de mobilidade num espaço com obstáculos. Existem vários métodos para a planificação de caminhos, sendo que a escolha depende do grau de complexidade e da qualidade do meio onde o veículo se irá movimentar, bem como de características do próprio veículo. Como forma de avaliação do planeamento usam-se critérios como o comprimento, o tempo, a distância aos obstáculos, ou a *suavidade* dos caminhos. Em [4] encontram-se diversos métodos clássicos para o planeamento de trajectórias.

Este documento propõe um método para o planeamento de caminhos num espaço plano, cujos obstáculos são representados pelas «paredes» de uma pista de fórmula 1. A pista é modelada utilizando segmentos de recta paralelos e arcos de circunferência concêntricos, ao invés da usual representação de obstáculos por intermédio de formas poligonais, e define assim apenas dois obstáculos, as margens esquerda e direita, que se fecham individualmente no início (*ou fim*) da pista. Quanto ao modelo do veículo utilizado, trata-se de um carro de quatro rodas, tracção e direcção dianteiras, e forma rectangular.

Este modelo impõe uma importante restrição na forma dos caminhos, devendo estes ser de *curvatura* contínua, razão pela qual não podem ser formados, apenas, por segmentos de recta e arcos de circunferência. A junção destes dois tipos origina uma descontinuidade na curvatura. A solução apresentada baseia-se no uso de *clotóides*, para fazer a adaptação entre os caminhos

referidos (*cf.* [1]). A abordagem tomada no documento referido difere essencialmente na natureza do problema em questão — os arcos de circunferência e os segmentos de recta não são obstáculos pré-definidos, mas consequências de uma metodologia que constrói um caminho sub-óptimo entre posições inicial e final pré-definidas, num espaço plano e com obstáculos poligonais.

II. MODELO DO VEÍCULO

O modelo do veículo, V , está representado na Fig. 1. As duas rodas dianteiras são direccionais. O referencial do carro, R , está fixo ao centro do eixo traseiro. A configuração de V é definida por um 4-tuplo (x, y, θ, k) , onde x e y são as coordenadas de posição de V , θ a orientação (ângulo entre o eixo dos xx e o eixo principal do veículo) e k é o inverso do raio da *curva* que o carro descreve (definido em função da orientação das rodas dianteiras).

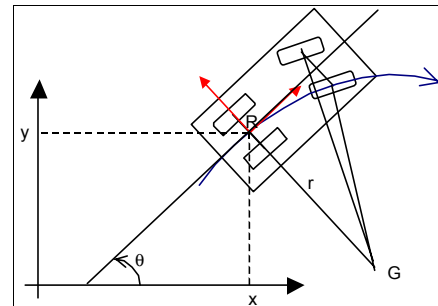


Fig. 1 – Modelo do veículo.

O movimento de V efectua-se num espaço planar, $W \subset \mathbb{R}^2$, e está limitado por três restrições clássicas.

A primeira deve-se ao facto de o eixo traseiro ser fixo, e de as rodas traseiras rolarem sem escorregar, de onde se conclui que o centro de rotação, G , do corpo V tem de estar alinhado pelo eixo traseiro. Daí resulta a seguinte restrição no movimento:

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0. \quad (1)$$

A segunda deve-se ao facto de a orientação das rodas da frente ser mecanicamente limitada, sendo o raio, r , (distância entre R e G) limitado inferiormente por r_{\min} , ou seja, a curvatura é limitada superiormente por $k_{\max} = 1/r_{\min}$:

¹ Robot Auto Racing Simulator – Simulador de carros de corrida desenvolvido por Mitchell E. Timinin, com o intuito de apoiar o desenvolvimento de veículos automáticos utilizando Inteligência Artificial e Controlo Adaptativo em Tempo Real.

$$|k| \leq k_{\max}. \quad (2)$$

A terceira restrição deriva do facto da derivada da curvatura estar limitada superiormente, ou seja o veículo (**V**) só pode orientar as rodas dianteiras a uma velocidade finita:

$$|\dot{k}| \leq \sigma_{\max}. \quad (3)$$

III. PORQUÊ AS CLOTÓIDES ?

As *clotóides* são curvas com um perfil de curvatura de variação linear, sendo por isso a forma mais simples de adaptação entre a curvatura de um arco de circunferência e a de um segmento de recta (em que a curvatura é nula). A curvatura de uma clotóide é definida por:

$$k(s) = \sigma s + k_0, \quad (4)$$

sendo σ a derivada da curvatura, k_0 a curvatura inicial, e s a variável de posição na curva, em forma paramétrica, de tal forma que $s \in [0, l]$, onde l é o comprimento da curva. A orientação de um ponto da curva vem dada pelo integral de (4):

$$\theta(s) = \int_0^s k(u) du = \frac{\sigma}{2} s^2 + k_0 s + \theta_0, \quad (5)$$

onde θ_0 é a orientação inicial. A posição de um ponto da clotóide é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(s) = r_l \sqrt{2\pi\theta_l} R(\theta_l - \theta_0) \left(\begin{bmatrix} CF\left(\sqrt{\frac{2\theta'(s)}{\pi}}\right) \\ SF\left(\sqrt{\frac{2\theta'(s)}{\pi}}\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} CF\left(\sqrt{\frac{2\theta_0'}{\pi}}\right) \\ SF\left(\sqrt{\frac{2\theta_0'}{\pi}}\right) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

em que θ_l e r_l são a orientação e raio finais da curva, R uma matriz de rotação e x_0, y_0 a posição inicial. Ainda, note-se que:

$$\theta'(s) = \frac{\sigma}{2} s^2 + k_0 s + \theta_0' \quad \text{e} \quad \theta_0' = \frac{k_0^2}{2\sigma}. \quad (7)$$

As funções CF e SF são, respectivamente, os integrais co-seno e seno de *Fresnel*. As suas expressões são: (8)

$$\forall x \in \mathfrak{R}, \quad CF(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, \quad SF(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du.$$

Estes dois integrais podem ser calculados numericamente com recurso a séries de *Taylor* (cf. [2]).

IV. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

A. Existência de Caminhos de Curvatura Contínua

Neste trabalho é proposta a construção de caminhos de curvatura contínua, compostos por uma sequência de *curvas*, adaptadas a cada troço de uma pista genérica de *fórmula 1*, que define um «canal» de movimento para o

veículo, **V**. A cada curva da pista faz-se corresponder um caminho composto, em sequência, pelas seguintes *curvas*: (1) q_1 – uma clotóide de entrada na curva, (2) q_2 – um arco de circunferência que acompanha a curva, (3) q_3 – uma clotóide de saída da curva, e (4) q_4 – um segmento de recta que une este caminho ao que percorre a curva seguinte da pista. A este caminho composto atribui-se o nome de *troço de trajectória*.

Na Fig. 2 podem observar-se três troços diferentes, p, q , e f , construídos de acordo com os métodos descritos, mais à frente, neste texto.

A dificuldade surge ao tentar descrever, para cada tipo específico de topologia, numa pista de *fórmula 1*, em que condições existe, ou não, um caminho composto, como o descrito, que cumpra simultaneamente, as restrições do veículo relativas à suavidade do caminho, e o não ultrapassar das margens da pista. Há que avaliar, sobretudo, em que condições é possível ligar troços de trajectória consecutivos, por forma a manter a continuidade da curvatura nas suas ligações. A suavidade do caminho fica garantida desde que as clotóides (segmentos 1 e 3 de um troço de trajectória) não violem (3). A continuidade da curvatura, entre os segmentos de um troço de trajectória, é garantida por construção. O afastamento das margens da pista é garantido, também por construção, assunto que é abordado mais à frente neste texto. Na secção seguinte avaliam-se as condições em que é possível ligar troços de trajectória consecutivos.

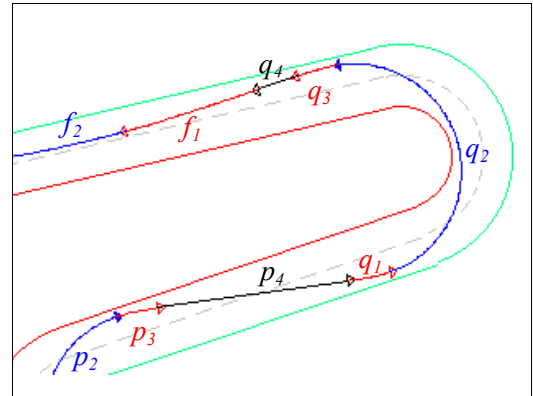


Fig. 2 – Exemplos de caminhos compostos.

A.1. Existência de uma Recta de ligação

Os segmentos de recta da trajectória devem unir a clotóide de saída à de entrada de troços de trajectória consecutivos, tal como faz o segmento p_4 na Fig. 2. A existência de um tal segmento de recta depende da distância relativa das circunferências de cada um dos troços (tal como p_2 e q_2), e do comprimento das clotóides que une. A seguinte condição é *necessária* (mas não suficiente) para garantir a existência de uma recta de ligação:

— Para um troço da pista do tipo *curva e contra-curva*, como o da Fig. 2:

$$r_q + r_p \leq \left\| \begin{bmatrix} x_{cq} \\ y_{cq} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \end{bmatrix} \right\|, \quad (9)$$

onde r_q , r_p e x_{cq} , y_{cq} e x_{cp} , y_{cp} são os raios e as coordenadas dos centros, dos arcos de circunferência dos dois troços de trajectória, p e q .

— Para um troço da pista do tipo *curva e curva*, seja $r_p > r_q$:

$$\left\| \begin{bmatrix} x_{cq} \\ y_{cq} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \end{bmatrix} \right\| + r_q > r_p, \quad (10)$$

bem como que o sentido da recta resultante, esteja de acordo com o sentido da pista.

Estas condições são necessárias e suficientes para que haja «espaço» entre as circunferências para colocar outros segmentos, a recta e as clotóides de entrada e saída. Dependendo do comprimento das clotóides pode haver ou não (caso em que as clotóides se sobrepõem) «espaço» para incluir a recta de ligação. As condições que garantem a não sobreposição das clotóides são abordadas na secção seguinte.

A.2. Cálculo das Clotóides

Foi desenvolvido um algoritmo para, com base nas circunferências dos troços de trajectória, calcular as clotóides que adaptam estas aos segmentos de recta da *trajectória*. Do ponto de vista do algoritmo, considera-se um modelo que compreende apenas uma recta e um arco de circunferência, sendo indiferente se a clotóide calculada se destina a adaptar uma curva para a esquerda ou para a direita, ou se se trata de uma clotóide de entrada ou de saída da curva. Uma interpretação visual do modelo encontra-se na Fig. 3.

No modelo, o eixo dos xx representa a recta da trajectória à qual a clotóide deverá ser tangente e a circunferência representa o segundo segmento de um troço de trajectória (tal como q_2). A recta encontra-se a uma distância m da circunferência; o significado deste parâmetro é explicado mais à frente no texto. O problema traduz-se em encontrar o valor de σ e de l , parâmetros da clotóide, de tal forma que esta seja tangente à recta xx com curvatura zero, e tangente à circunferência com curvatura $1/r_i$.

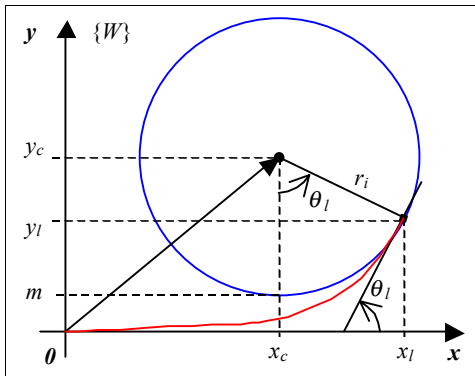


Fig. 3 – Modelo para cálculo de uma clotóide.

Deste enunciado resultam as seguintes condições fronteira nas configurações inicial e final da curva:

$$\begin{aligned} (x, y, \theta, k)(0) &= (0, 0, 0, 0) \\ (x, y, \theta, k)(l) &= (x_l, y_l, \theta_l, 1/r_i) \end{aligned} \quad (11)$$

Podemos ainda escrever-se, por observação da Fig. 3:

$$\begin{bmatrix} x_l \\ y_l \end{bmatrix} - r_i \begin{bmatrix} \sin \theta_l \\ \cos \theta_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ m + r_i \end{bmatrix}, \quad (12)$$

ou ainda, substituindo x_l e y_l , por uso de (6):

$$\begin{cases} \frac{m}{r_i} + 1 = \sqrt{2\pi\theta_l} SF \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta_l \right) + \cos \theta_l \equiv f_s(\theta_l) \\ \frac{x_c}{r_i} = \sqrt{2\pi\theta_l} CF \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta_l \right) - \sin \theta_l \equiv f_c(\theta_l) \end{cases} \quad (13)$$

As funções $f_s(\theta)$ e $f_c(\theta)$ são independentes de parâmetros específicos do problema, e podem observar-se na Fig. 4.

Dado que são funções monótonas é possível resolver facilmente (13a) por forma a obter uma solução única para θ_l . Tal é feito utilizando o método de *Newton* para a função:

$$g(\theta_l) \equiv f_s(\theta_l) - \frac{m}{r_i} - 1 = 0, \quad (14)$$

cujas derivada é:

$$g'(\theta_l) = SF \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta_l \right) / \sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta_l. \quad (15)$$

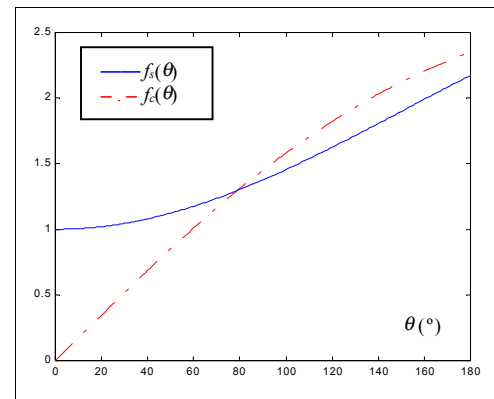


Fig. 4 – Gráficos de funções invariantes do algoritmo.

Uma vez obtido o valor de θ_l , a equação (13b) permite achar o valor respectivo de x_c . Estes dois valores tornam o modelo da Fig. 3 possível. O valor do ângulo final θ_l permite por sua vez determinar os parâmetros da clotóide:

$$\sigma = \frac{1}{2r_i^2\theta_l}, \text{ e } l = 2r_i\theta_l. \quad (16)$$

A.3. Não sobreposição das clotóides

A secção anterior revelou, que para uma configuração de um segmento de recta e uma circunferência, como o do modelo apresentado, que depende apenas do raio, r_i , da circunferência, e do parâmetro m , existe apenas uma

solução. O valor de x_c estabelece, em certa medida, o quanto a clotóide se estende pela recta, permitindo através da junção de dois daqueles modelos, unidos pela recta xx , extrair a seguinte condição, necessária e suficiente, para que *não* haja sobreposição de clotóides em troços de trajectória consecutivos:

$$x_{cp} + x_{cq} \leq d_{cx}, \quad (17)$$

em que x_{cp} e x_{cq} se referem às soluções (13b), e d_{cx} é a distância entre as circunferências, medida ao longo da recta xx , ou seja:

$$d_{cx} = \sqrt{\left\| \begin{bmatrix} x_{cq} \\ y_{cq} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{cp} \\ y_{cp} \end{bmatrix} \right\|^2 - (r_{ip} + m_p - r_{iq} - m_q)^2}. \quad (18)$$

Nestas condições, o comprimento da recta vem dado por:

$$l_r = d_{cx} - (x_{cq} + x_{cp}). \quad (19)$$

A.4. Existência de arco de circunferência

Um troço de trajectória contém um arco de circunferência, ladeado por uma clotóide de entrada e por uma de saída. Pretende-se que este arco seja tão grande quanto possível e que as clotóides, que adaptam a curvatura, sejam tão pequenas quanto possível, dado que o caminho óptimo é formado por segmentos de recta e arcos de circunferência. Numa pista de *fórmula 1* nem sempre as curvas são suficientemente amplas para acomodar todas estas *curvas*, não havendo por vezes espaço para a circunferência da trajectória. Do cálculo das clotóides sabe-se que estas efectuam uma variação de orientação de θ_{lp} para a clotóide de entrada, e de θ_{lq} para a clotóide de saída. A variação total de orientação *disponível* é a diferença de orientação entre as rectas de entrada e de saída, xx_p e xx_q . Sendo assim, o arco de circunferência dispõe de uma variação de orientação de:

$$\beta_c = (\theta_{xxq} - \theta_{xxp}) - (\theta_{lq} - \theta_{lp}), \quad (20)$$

valor que sendo positivo é condição necessária e suficiente para a existência de um arco de circunferência.

B. Funcionamento do Algoritmo

Avaliadas as condições de existência de troços de trajectória, bem como a existência de ligações entre estes, no contexto de um ambiente do tipo pista de *fórmula 1*, há que explicar *como* funciona o algoritmo de um ponto de vista global. O algoritmo implementa um planeador *local*, que funciona em tempo real, à medida que o veículo percorre a pista.

Uma pista pode definir-se pelo conjunto $\mathbf{P} = \{c_j, j = 1, \dots, N\}$, em que c_j representa uma curva da pista, e N o número de curvas. A existência, ou não, de uma recta a unir duas curvas consecutivas, encontra-se implícita na sua posição relativa. Tal como foi explicado na secção IV-A, ao conjunto \mathbf{P} está associado um conjunto $\mathbf{\Pi} = \{\pi_j, j = 1, \dots, N\}$, de troços de trajectória. Em cada iteração, i , o algoritmo toma em consideração três curvas, definidas pelo conjunto $\Omega_i = \{c_{i-1}, c_i, c_{i+1}\}$, $i = 1, \dots, N$, para o cálculo da *trajectória de ligação* entre as curvas c_{i-1} e c_i .

A trajectória de ligação corresponde: (a) à curva, à clotóide de saída, e à recta do troço de trajectória π_{i-1} , e (b) à clotóide de entrada do troço de trajectória π_i . Neste cálculo a curva c_{i+1} é tida em conta para que o cálculo da ligação entre esta e a curva c_i não fique impossibilitado na iteração seguinte ($i+1$). O cálculo das trajectórias de ligação é diferente consoante a relação entre as curvas de Ω_i , bem como da sua posição relativa, ou seja, se a sua topologia é do tipo *curva* e *contra-curva* ou *curva* e *curva*, ou *curva* e *curva* e *curva*, bem como da distância entre cada uma delas.

C. Circunferências de Apoio

Denomina-se de *circunferência de apoio*, α_i , a curva de trajectória de um determinado troço de trajectória, π_i . O cálculo dos outros segmentos de um troço de trajectória, π_i , baseia-se no estabelecimento *a priori* da sua circunferência de apoio (e daí o seu nome). Tal facto pode ficar claro se se recordar o algoritmo apresentado na secção IV-A.2. A secção seguinte fornece uma abordagem intuitiva para a escolha destas circunferências.

C.1. Escolha das circunferências de apoio

O veículo \mathbf{V} irá efectuar trajectórias que se encontrem dentro dos limites definidos pelas margens da pista de *fórmula 1*, e segundo essas restrições, há que definir critérios que maximizem a utilização do espaço disponível. Em primeiro lugar há que retirar do espaço livre metade da largura do veículo, l_c , em cada uma das margens da pista (ver Fig. 5 e Fig. 6²). Desta forma garante-se que as rodas do veículo não saem da pista, e pode considerar-se o carro como um ponto concentrado no seu centróide.

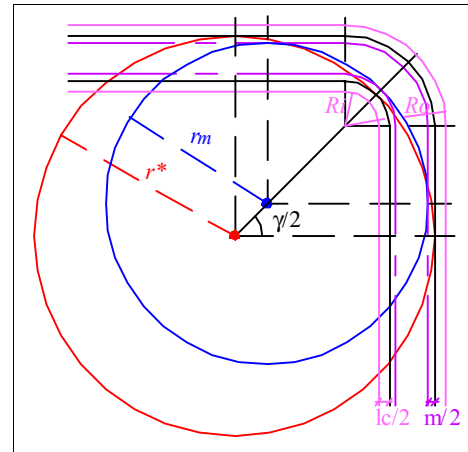


Fig. 5 – Circunferências de maior raio e de apoio média.

Caso apenas fossem utilizados arcos de circunferência e segmentos de recta para a construção da trajectória, o melhor critério seria a escolha da localização e dimensão dos arcos de circunferência de tal forma que estes tivessem o maior raio possível, r^* , de acordo com a curva da pista em questão (cf. [3]). Uma vez definidos os arcos de

² R_o – Raio externo da curva da pista; R_i – Raio interno da curva da pista; γ – Ângulo de abertura da curva da pista; r_i , r_o e r_m – Raios das circunferências de apoio interior, exterior e média.

circunferência estes seriam ligados por segmentos de recta, de tal forma que um dado segmento fosse tangente aos arcos anterior e posterior. A necessidade de utilização de clotóides implica a adaptação deste método, dado que estas necessitam de algum «espaço» para adaptarem a curvatura, entre o segmento de recta e o arco circunferência, e vice versa. Por esta razão os arcos de circunferência escolhidos não podem ser os de maior raio, havendo que diminuir este raio de uma pequena quantidade, uma margem m .

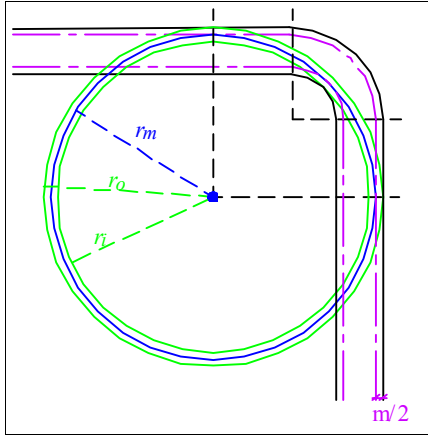


Fig. 6 – Circunferências de apoio interior, exterior e média.

Quanto maior for esta margem maior será o comprimento da clotóide de adaptação, maior será a suavidade da trajectória resultante, mas também mais afastada estará a trajectória da solução ideal. Esta quantidade não pode ser tão pequena quanto se queira, pois tal acabaria por violar a restrição expressa em (3).

A redução do raio por forma a comportar a implementação das clotóides reflecte-se numa redução adicional na largura da pista.

O cumprimento de restrições relativas a obstáculos, que são as margens da pista, encontra-se implícito na construção destas circunferências.

C.2. Cálculo das diferentes Topologias

Tal como explicado na secção IV-B, o cálculo das trajectórias de ligação depende da topologia das curvas de Ω_i . De seguida segue-se a análise de três topologias básicas, com as quais é possível, através da sua combinação, a análise de topologias mais complexas. Para efeitos de exposição, seja $\{c_p, c_q\}$ um dos dois pares de curvas consecutivas definidas pelo conjunto Ω_i ; note-se ainda que a curva de apoio do troço π_{i-1} , tendo sido calculada na iteração $i-1$, é um parâmetro fixo na iteração corrente, i .

— Troço de Curva Simples ($\mathbf{rdr}, \mathbf{rer}$)³

Em cada iteração i do algoritmo, este supõe inicialmente que as curvas c_i e c_{i+1} são ambas curvas simples. Ou seja, supõe que as curvas se encontram suficientemente distantes uma da outra, de tal forma que a condição (17) não será violada.

Deste modo, para cada uma das curvas, calculam-se circunferências de apoio de tal forma que sejam tangentes: (a) às rectas *exteriores* (ver Fig. 7, rectas mais escuras), que precedem e sucedem a curva, e (b) à circunferência *interior* da pista, o que equivale à resolução do seguinte sistema de equações⁴:

$$\begin{cases} \frac{(m_1 \cdot x_{cp} - y_{cp} + b_1)^2}{m_1^2 + 1} = r_{mp}^2 \\ (x_{cp} - X_{cp})^2 + (y_{cp} - Y_{cp})^2 = (r_{mp} - R_{ip})^2 \\ \frac{(m_2 \cdot x_{cp} - y_{cp} + b_2)^2}{m_2^2 + 1} = r_{mp}^2 \end{cases} \quad (21)$$

em ordem a x_{cp} , y_{cp} e r_{mp} .

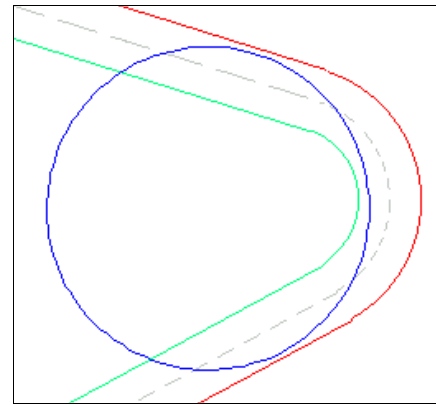


Fig. 7 – Exemplo de troço de curva simples.

De entre as *oito* soluções do sistema (21) há que seleccionar a solução que se adapta à pista, ou seja, aquela que não viole a premissa de evitar os obstáculos; no exemplo da Fig. 7 a solução de (21) corresponde à circunferência mostrada. Uma vez calculadas as duas circunferências de apoio há que verificar se a condição (17) é violada entre algum dos pares de curvas $\{c_p, c_q\}$. Se nenhum dos pares violar (17) então a curva c_i será de facto uma curva simples, e é efectuado o cálculo da trajectória de ligação entre as curvas c_{i-1} e c_i , tal como explicado na secção IV-A.; no caso de algum (ou ambos) dos pares violar a condição (17) torna-se necessário aplicar os métodos seguintes, consoante a sua topologia.

— Troço de Curva Contra-Curva ($\mathbf{re[r]dr}, \mathbf{rd[r]er}$)

Consideram-se troços de topologia *curva e contra-curva* cujas circunferências de apoio de maior raio não respeitam a condição (17), ver Fig. 8.

Se a condição não é respeitada pelo par $\{c_i, c_{i+1}\}$, definido neste âmbito como $\{c_p, c_q\}$, então é calculada a circunferência de apoio *média* de modo a que esta seja tangente: (a) à recta *exterior* que antecede c_p , (b) à circunferência *interior* de c_p , e (c) a uma recta que é

³ \mathbf{r} – Recta; \mathbf{e} – Curva para a esquerda; \mathbf{d} – Curva para a direita

⁴ x_{cp}, y_{cp}, r_{mp} – coordenadas do centro e raio da circunferência de apoio média; m_1, b_1 e m_2, b_2 – declives e ordenadas na origem das rectas da margem exterior da pista, que precede e sucede a curva, respectivamente; X_{cp}, Y_{cp}, R_{ip} – coordenadas do centro e raio da circunferência interior da pista.

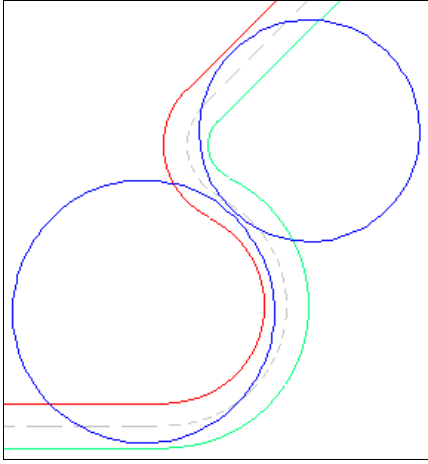


Fig. 8 – Exemplo de troço de curva contra-curva.

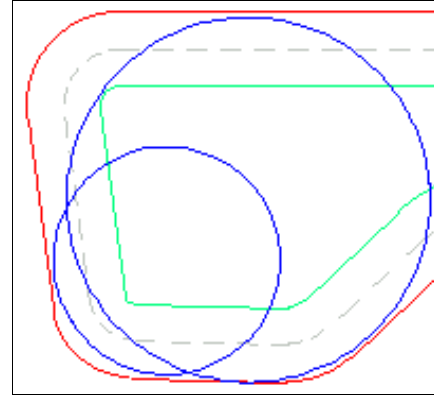


Fig. 9 – Exemplo de troço de duas curvas consecutivas.

calculada tendo em atenção a curva seguinte por forma a não impossibilitar o cálculo da mesma.

O sistema de equações é idêntico ao do problema anterior (21), onde apenas se trocam os parâmetros da recta de saída, ou seja, m_2 e b_2 por m_{aux} e b_{aux} . A recta auxiliar é calculada de forma a ser perpendicular à recta que separa as duas curvas (orientação longitudinal). Ainda, a sua distância à margem esquerda (ou direita) da pista varia consoante a relação entre os raios de c_p e c_q .

Se a condição não for respeitada pelo par $\{c_{i-1}, c_i\}$, definido neste âmbito como $\{c_p, c_q\}$ então, a circunferência de apoio média é calculada de modo a que seja tangente: (a) à circunferência de apoio da curva c_p , (b) à circunferência interior de c_q , e (c) à recta exterior que sucede c_q , o que é feito resolvendo o seguinte sistema de equações⁵:

$$\begin{cases} (x_{cq} - x_{cp})^2 + (y_{cq} - y_{cp})^2 = (r_{mq} + r_{mp})^2 \\ (x_{cq} - X_{iq})^2 + (y_{cq} - Y_{iq})^2 = (r_{mq} - R_{iq})^2 \\ \frac{(m_2 \cdot x_{cq} - y_{cq} + b_2)^2}{m_2^2 + 1} = r_{mq}^2 \end{cases} \quad (22)$$

em ordem a x_{cq} , y_{cq} e r_{mq} .

Em ambos os casos é necessário seleccionar a solução que se adapta ao interior da pista.

— Troço de Curvas Consecutivas (re[r]er, rd[r]dr)

Consideram-se troços que contenham curvas seguidas para o mesmo lado, cujas circunferências de apoio de maior raio não respeitam a condição (17), ver Fig. 9.

Ao contrário dos dois casos anteriores, nesta configuração há a necessidade de introdução de um grau de liberdade que permita, através do uso de um método de procura, encontrar uma solução satisfatória para as circunferências de apoio. O grau de liberdade escolhido é o raio r_m , que varia em cada iteração na qual são

calculadas as coordenadas do centro da circunferência respectiva. No final de cada iteração testa-se a validade e satisfação da solução obtida.

Nos casos em que a condição (17) não é respeitada pelo par $\{c_p=c_i, c_q=c_{i+1}\}$, então são calculadas, em cada iteração (onde varia r_{mp} e r_{mq}), as circunferências de apoio $\{\alpha_p, \alpha_q\}$ de modo a que:

- α_p seja tangente à recta (m_1, b_1) , que precede c_p ;
- α_q seja tangente à recta (m_2, b_2) , que sucede c_q ;
- $\{\alpha_p, \alpha_q\}$ sejam ambas tangentes a uma recta auxiliar definida por (m_{aux}, b_{aux}) .

Estas condições resumem-se nos dois sistemas de equações seguintes:

$$\begin{cases} \frac{(m_{1,2} \cdot x_{cp,q} - y_{cp,q} + b_{1,2})^2}{m_{1,2}^2 + 1} = r_{mp,q}^2 \\ \frac{(m_{aux} \cdot x_{cp,q} - y_{cp,q} + b_{aux})^2}{m_{aux}^2 + 1} = r_{mp,q}^2 \end{cases}, \quad (23)$$

sendo resolvidos em ordem a x_{cp} , y_{cp} e x_{cq} , y_{cq} , respectivamente.

No caso em que é o par $\{c_p=c_{i-1}, c_q=c_i\}$, que não respeita (17), apenas é possível variar o raio r_{mq} uma vez que a circunferência de apoio α_p já está fixa. Calcula-se em cada iteração a circunferência de modo a que (a) seja tangente a uma recta auxiliar (m_{aux}, b_{aux}) , e (b) à recta exterior (m_2, b_2) que sucede c_q , o que é feito resolvendo o sistema de equações de (23), relativo a c_q , em ordem a x_{cq} e y_{cq} .

Os valores $r_{mp,q}$ são variados desde os seus máximos (r^*) até, no limite, a zero. É escolhido o primeiro valor ou par de valores cuja solução satisfaça as restrições referentes aos obstáculos.

— Outras Topologias

Os métodos apresentados são facilmente generalizáveis por forma a ter em conta outras topologias não descritas neste documento. Tal é possível recorrendo a combinações das topologias descritas.

⁵ $x_{cp,q}$, $y_{cp,q}$, $r_{mp,q}$ – coordenadas dos centros e raios das circunferências de apoio médias.

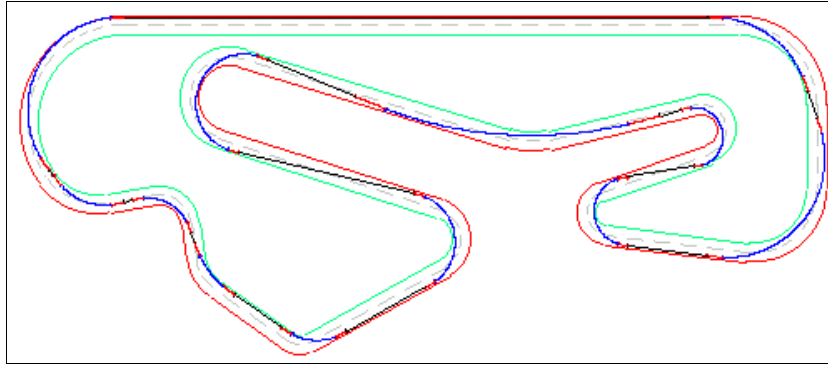


Fig. 10 – Exemplo de trajectória para a pista do Estoril (Portugal).

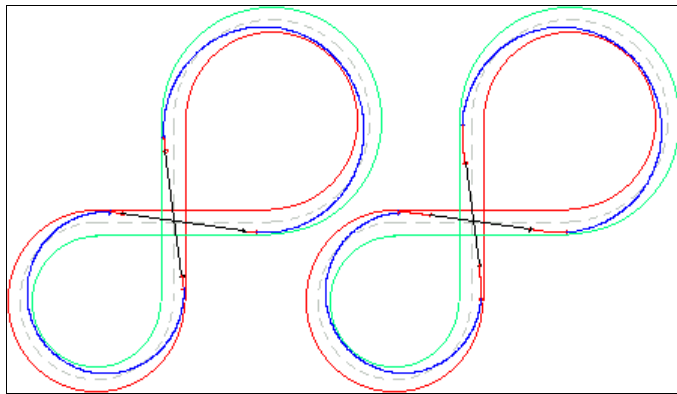


Fig. 11 – Exemplos de variação da margem m .

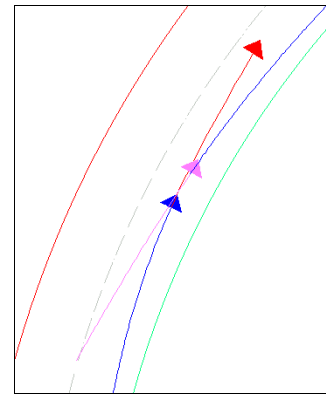


Fig. 12 – Exemplo de limitação do algoritmo.

V. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O método de planeamento descrito permite o cálculo em tempo real de trajectórias *suaves* para pistas de corrida de automóveis. A trajectória calculada pode ser usada como referência para um sistema *fuzzy* que controle a interacção do veículo com os outros veículos concorrentes — estes são obstáculos dinâmicos. Na plataforma de simulação RARS está já implementada toda a gestão dos veículos corredores, os modelos dinâmico do veículo e da pista de corrida, pelo que esta se torna a plataforma ideal para testar a robustez das trajectórias calculadas.

Na Fig. 10, pode-se observar que a trajectória é suave, em termos de curvatura, não existindo por isso transições *bruscas* entre rectas e curvas. Todas as transições são feitas através de clotóides.

Como foi explicado anteriormente, o parâmetro de ajuste, m , reflecte a suavidade da trajectória, efeito relacionado com o comprimento das clotóides. A escolha da margem m depende das limitações físicas do veículo e deve ser escolhida de tal forma que a condição (2) seja respeitada. Na Fig. 11 pode observar-se a implicação deste parâmetro na suavidade da trajectória, nomeadamente no comprimento das clotóides.

VI. CONCLUSÕES E TRABALHO FUTURO

O algoritmo desenvolvido funciona adequadamente, excepto em situações em que não é possível garantir a não sobreposição de clotóides, seja na ligação de troços de trajectória, ou dentro de um mesmo troço. Um destes casos é ilustrado na Fig. 12.

A resolução destes problemas exigiria uma formalização detalhada dos conceitos introduzidos, bem como, em alguns casos, o uso de outras formas de adaptação da curvatura. Além disso, ainda não se garante, em qualquer dos métodos descritos, a optimalidade espacial *ou* temporal das trajectórias se não ao nível local de algumas das topologias.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Sheuer. Planification de Chemins à Courbure Continue pour Robot Mobile Non-holonyme. Thèse de doctorat, Inst. Nat. Polytechnique, Grenoble (F), Janeiro de 1998.
- [2] Th. Fraichard, A. Sheuer and R. Desvigne. From Reeds and Shepp's to Continuous-Curvature Paths. In *Int. Conf. On Advanced Robotics*, Outubro de 1999.
- [3] Brian Beckman. The Physics of Racing — Introduction to the Racing Line. 1991.
<http://members.home.net/rck/phor/05-Cornering.html>
- [4] J. C. Latombe. Robot Motion Planning. Kluever Academic Publishers, Dezembro de 1990.