

SIGNAUX ET SYSTÈMES. — Estimation du retard entre signaux de même forme.  
Note de Hervé Rix et Sérgio Jesus, présentée par Bernard Picinbono.

Remise le 19 décembre 1983, acceptée après révision le 7 mai 1984.

Nous exposons une méthode originale d'estimation du décalage entre deux signaux de même forme. Cette méthode combinée avec un procédé de moyennage synchrone classique, nous a permis d'extraire un signal déterministe d'un environnement bruité.

SIGNAL AND SYSTEMS. — Time Delay Estimation for Equal Shape Signals.

*An original method in order to estimate the time delay between two equal shape signals is presented. This method combined with the classical averaging of time-locked measurements, makes it possible to extract a deterministic signal from a random noise.*

1. INTRODUCTION. — La méthode de « sommation synchrone » est couramment utilisée pour détecter ou estimer un signal répétitif noyé dans du bruit (par exemple : bas potentiels cardiaques, potentiels évoqués). Dans le cas idéal où le signal se reproduit de façon identique (à un facteur d'échelle près), en présence d'un bruit blanc et en supposant un alignement parfait, la méthode améliore d'un facteur  $\sqrt{N}$  le rapport signal à bruit (S/B) après  $N$  sommations. Toute erreur de synchronisation crée un décalage aléatoire « jitter » qui a pour effet d'aplatir le signal moyen en le convoluant par la densité de probabilité de ce décalage [1]. La perte de rapport S/B qui en résulte ne peut pas toujours, dans la pratique, être récupérée par une augmentation de  $N$  : on ne dispose pas d'un nombre suffisant de signaux ou la forme du signal évolue de façon significative si  $N$  augmente trop.

On a donc intérêt à avoir une synchronisation la plus précise possible : on est en présence d'un problème d'estimation du temps de retard entre deux signaux de même forme auquel une grande quantité de travaux a déjà été consacrée (essentiellement pour les applications en acoustique sous-marine). Parmi les méthodes les plus utilisées on peut citer :

- la boucle à verrouillage de retard [2] qui est une estimation au sens des moindres carrés et qui suppose des signaux unimodaux ;
- la méthode de Chan-Riley-Plant ([3], [4]) : elle estime les coefficients de la réponse impulsionnelle (finie) d'un filtre qui approche l'effet du retard ;
- les méthodes fondées sur la recherche du maximum de la fonction d'intercorrélation : le problème ici est d'adapter un filtrage au signal pour avoir un maximum aigü de cette fonction ([5]-[6]) ;
- celles enfin estimant le retard par la pente moyenne de la courbe de phase en fonction de la fréquence [7].

La méthode que nous proposons est une méthode simple, travaillant uniquement sur le signal temporel : elle estime le retard en détectant le passage à zéro d'une droite. Nous exposons ci-dessous son principe ainsi qu'une simulation numérique de son application aux procédés de sommation synchrone.

## 2. LA MÉTHODE.

2.1. *Principe.* — Soit  $s(t)$  un signal réel, intégrable, d'intégrale non nulle :

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = A \neq 0.$$

Dans le cas d'un signal complexe  $s(t)$  représente soit le module soit le carré du module en supposant le signal d'énergie finie. Soit :

$$(2) \quad S(t) = \left( \int_{-\infty}^t s(x) dx \right) / A,$$

l'intégrale normée du signal  $s(t)$ . L'intégrale normée du signal :

$$(3) \quad v(t) = ks(t - D),$$

où  $k$  et  $D$  sont des constantes, est évidemment :

$$(4) \quad V(t) = S(t - D).$$

La méthode proposée pour l'estimation de  $D$  utilise le résultat suivant : on peut calculer  $D$  à partir des fonctions  $S$  et  $V$  en intégrant leur différence. En effet :

$$(5) \quad S(t) - V(t) = S(t) - S(t - D) = \left( \int_{t-D}^t s(x) dx \right) / A.$$

D'où, en tenant compte de (1) :

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (S(t) - V(t)) dt = D.$$

On peut exprimer ce résultat sous une autre forme : soit  $v_{\tau}(t) = v(t - \tau)$  le signal translaté de  $v$  d'une quantité  $\tau$ ; la relation (6) appliquée à  $S(t)$  et  $V_{\tau}(t)$  donne une fonction  $Q(\tau)$  :

$$(7) \quad Q(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (S(t) - V_{\tau}(t)) dt = D + \tau,$$

$Q(\tau)$  est donc une droite qui passe à zéro pour  $\tau = -D$ . En présence de signaux bruités, c'est l'exploitation de cette linéarité qui constitue le principe de la méthode.

## EXPLICATION DE LA PLANCHE

Fig. 1. — (a) Signal sans bruit :  $y = K e^{-x^2/2}$ ; (b) Une réalisation bruitée :  $S/N = 0 \text{ dB}$ ; (c) Signal moyen obtenu par la méthode : nombre de réalisations moyennées = 80; distribution des décalages  $N(0; 1,5)$ ; (d) signal moyen obtenu sans erreur de synchronisation; (e) signal moyen obtenu sans synchronisation.

Fig. 1. — (a) noiseless signal:  $y = K e^{-x^2/2}$ ; (b) noisy sequence:  $S/N = 0 \text{ dB}$ ; (c) mean signal obtained with our method: number of averaged sequences: 80; probability density of the delay: gaussian law  $N(0; 1.5)$ ; (d) mean signal obtained without jitter; (e) mean signal obtained without any alignment of the sequences.

Fig. 2. — Courbes représentant le gain  $G = \sigma_D / \sigma_{\Delta}$  en fonction de  $\sigma_D$  (unité d'abscisse écart type du signal gaussien (a) de la figure 1).

Fig. 2. — Curves plotting the gain  $G = \sigma_D / \sigma_{\Delta}$  in function of  $\sigma_D$  (abscissa unity = standard deviation of the gaussian signal (a) in figure 1).

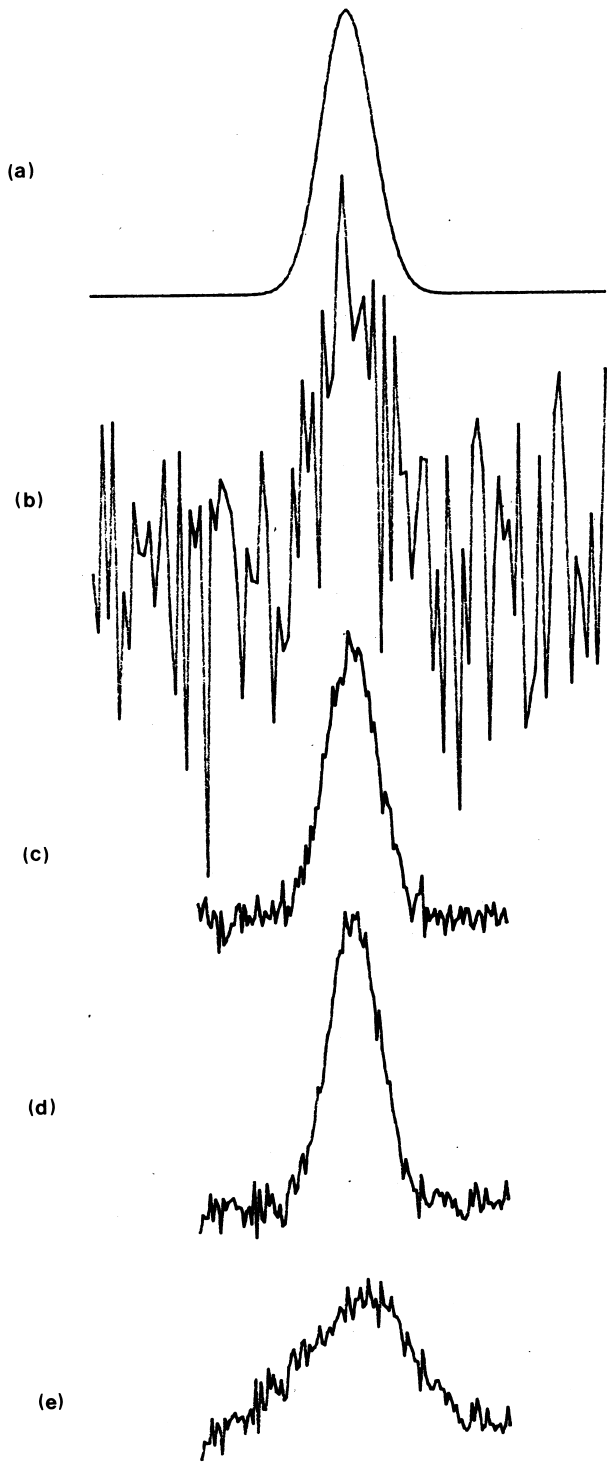


Fig. 1

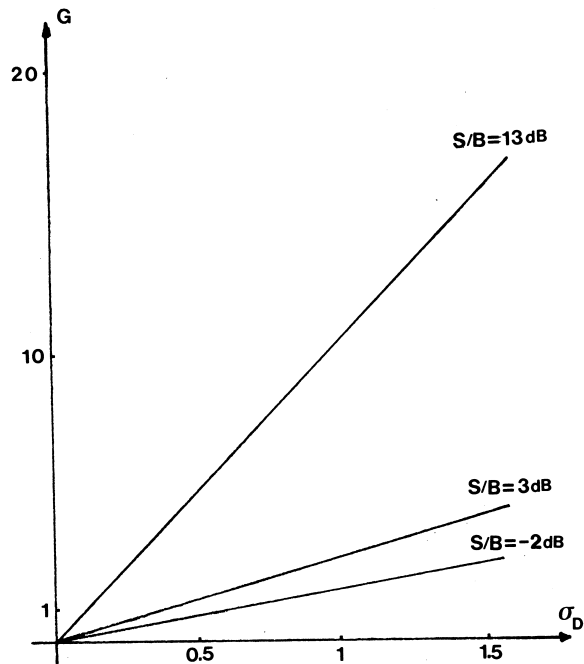


Fig. 2

2. 2. *Mise en œuvre.* — En présence de bruit sur les signaux,  $s(t)$  est remplacé par :

$$(8) \quad r(t) = s(t) + n(t).$$

L'aire totale  $A$  peut devenir nulle ou en tout cas présenter une grande incertitude. Il est donc préférable de travailler sur une fonction positive du signal. D'autre part, pour des bruits stationnaires, la condition d'intégrabilité n'est plus vérifiée sauf si les signaux sont à support borné, ce qui est le cas pour les signaux répétitifs (de type biologique par exemple) que nous envisageons pour les applications. Enfin dans les applications en vue, les signaux sont positifs et l'intervalle d'observation est plus grand que le support du signal. C'est pourquoi, nous avons choisi de prendre la partie positive du signal, opération qui ne modifie que la séquence de bruit sans modifier le signal :

$$(9) \quad r^+(t) = \max(r(t), 0).$$

En présence de deux signaux  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$  analogues à  $v(t)$  et décalés l'un par rapport à l'autre, on calcule pour une série de valeurs  $\tau_i (i=1 \dots M)$  la quantité  $\tilde{Q}(\tau_i)$  qui avec des notations évidentes s'écrit :

$$(10) \quad \tilde{Q}(\tau_i) = \int_a^b (R_1(t) - R_2(t - \tau_i)) dt,$$

où  $a$  et  $b$  sont les bornes de l'intervalle d'observation. La droite des moindres carrés représentant la régression des  $\tilde{Q}(\tau_i)$  par rapport aux  $\tau_i$ , de la forme  $y = a\tau + b$ , permet de fournir un estimateur  $\hat{D}$  du décalage  $D$  par son passage à zéro :

$$(11) \quad \hat{D} = b/a.$$

*Remarque.* — L'originalité de la méthode est d'exhiber une quantité  $Q(\tau)$  qui, sans bruit, est une fonction affine de  $\tau$ . Le choix que nous avons fait n'est pas unique : on peut, par exemple, en gardant les mêmes hypothèses, utiliser le premier moment de la différence des signaux :

$$(12) \quad \int t (s(t) - s(t + D)) dt = D.$$

Mathématiquement, cette expression est équivalente à (7).

Numériquement, il peut y avoir des différences suivant la nature des signaux. Dans notre cas, la simulation a donné des résultats tout à fait équivalents sur des profils gaussiens aussi bien que sur des profils lorentziens (en  $1/(1+t^2)$ ) qui n'ont pourtant pas de premier moment.

3. SIMULATION. — Nous avons simulé l'application de la méthode au moyennage synchrone de  $N$  signaux ayant un profil gaussien d'écart-type 1. Les décalages  $D$  imposés aux signaux (par rapport au premier) sont distribués suivant une loi normale  $N(m_D, \sigma_D)$ . Le bruit a été pris gaussien blanc, centré et non corrélé avec le signal. Le rapport  $S/B$  a été déterminé par la relation :

$$(13) \quad S/B \text{ (dB)} = 10 \log_{10} (\Sigma s_i^2 / \Sigma n_i^2),$$

où  $s_i$  et  $n_i$  sont les valeurs échantillonnées du signal et du bruit.

La figure 1 illustre un cas d'application. Un signal gaussien (a) a été bruité (b); un nombre  $N (= 80)$  de réalisations indépendantes telles que (b) ont ensuite été moyennées :

- soit après synchronisation, à partir de signaux aléatoirement décalés, en utilisant notre méthode (c);
- soit en imposant une synchronisation parfaite (d);
- soit en n'effectuant aucune synchronisation (e).

Il est à noter que les décalages aléatoires initiaux sont « petits ». Pour des signaux répétitifs ceci suppose une première synchronisation grossière. Dans l'exemple choisi on peut constater la forte ressemblance entre (c) et (d) et l'amélioration par rapport à (e). Dans les applications, cette amélioration dépend évidemment, pour un rapport S/B donné, de la valeur de l'écart-type  $\sigma_{\Delta}$  de l'erreur de synchronisation  $\Delta = \hat{D} - D$ , comparée à celle de l'écart-type  $\sigma_D$  initial. On peut montrer que la perte de rapport S/B de la courbe (e) par rapport à la courbe (d) s'exprime par le coefficient  $1/\sqrt{1+(\sigma_{\Delta}^2/\sigma^2)}$  où  $\sigma$  est l'écart-type du signal de base (pris comme unité ici). Notre synchronisation qui a pour effet de remplacer  $\sigma_D$  par  $\sigma_{\Delta}$  n'a d'intérêt que si le gain d'incertitude  $G = \sigma_D/\sigma_{\Delta}$  est supérieur à 1. C'est pourquoi nous avons calculé empiriquement ce gain en fonction de  $\sigma_{\Delta}$  pour plusieurs valeurs de S/B (fig. 2).

On peut avoir une idée des performances de la méthode en comparant  $\sigma_D$  à la borne inférieure de Cramer-Rao [8] obtenue dans le cas d'un signal d'énergie finie  $E$  en présence d'un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance  $N_0/2$ ; pour un signal gaussien d'écart-type  $\sigma$ , cette borne vaut :  $N_0 \sigma^2/E$ . A titre d'exemple, pour S/B = 0 dB, on trouve  $\sigma_D \simeq 0,45$  la borne inférieure étant de 0,37.

4. CONCLUSION. — Nous avons présenté une méthode dont l'intérêt principal réside dans sa simplicité. Elle ne nécessite pas le calcul de transformées de Fourier des méthodes fréquentielles. Comparée aux méthodes de corrélation, elle remplace la recherche d'un maximum par une série d'estimations ponctuelles; l'estimation finale est donnée par le passage à zéro d'une droite ajustée par les moindres carés. Enfin, les résultats obtenus déjà performants, le sont en l'absence de tout filtrage préalable des signaux. Il est à prévoir qu'un filtrage tenant compte d'une connaissance *a priori* du signal ne pourrait qu'améliorer les performances.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. MAX, *Méthodes et Techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques*, Masson, 1972, p. 244-245.
- [2] D. M. ETTER et S. D. STEARNS, *I.E.E.E. Trans. A.S.S.P.*, 29, 1981, p. 582-587.
- [3] Y. T. CHAN, J. M. RILEY et J. B. PLANT, *I.E.E.E. Trans. A.S.S.P.*, 28, n° 1, 1980, p. 8-16.
- [4] Y. T. CHAN, J. M. RILEY et J. B. PLANT, *I.E.E.E. Trans. A.S.S.P.*, 29, n° 3, 1981, p. 577-581.
- [5] C. H. KNAPP et G. C. CARTER, *I.E.E.E. Trans. A.S.S.P.*, 24, 1976, p. 320-327.
- [6] K. SCARBROUGH, R. J. TREMBLAY et G. C. CARTER, *I.E.E.E. Trans. A.S.S.P.*, 31, n° 5, 1983, p. 1191-1196.
- [7] Y. T. CHAN, R. V. HATTIN et J. B. PLANT, *I.E.E.E. Trans. A.S.S.P.*, 26, n° 3, 1978, p. 217-222.
- [8] C. W. HELSTROM, *Statistical Theory of Signal Detection*, 2nd ed. Pergamon Press, Hongrie, 1968.

Institut Universitaire de Technologie,  
Laboratoire de Signaux et systèmes,  
E.R.A. 835 du C.N.R.S., 41, boulevard Napoléon-III, 06041 Nice Cedex.