

**Engenharia de Sistemas e Computação**

**Processamento de Sinal em  
Redes de Comunicações Móveis**

Sérgio M.M. Jesus

`sjesus@ualg.pt`

Unidade de Ciências Exactas e Humanas

Universidade do Algarve

1998/99

Última revisão: 14 de Dezembro de 1998

(<ftp://ftp.ualg.pt/users/sjesus/pub/psrcm98.psz>)

(<ftp://ftp.ualg.pt/users/sjesus/pub/psrcm98.pdf>)

## Programa

<b>1.</b>	<b>Introdução</b>	4
<b>2.</b>	<b>O desafio do processamento espacio-temporal em RCM</b>	5
2.1	Motivação	5
2.2	Processamento espacial de sinais	5
2.3	Formador de feixes (beamformer)	6
2.4	Processamento de sinais multidimensionais	10
2.4.1	<i>Transformada de Fourier</i>	10
2.4.2	<i>Convolução</i>	11
<b>3.</b>	<b>O canal de comunicação</b>	12
3.1	Perdas de transmissão	12
3.2	Perdas por flutuação do sinal (fading)	13
3.2.1	<i>Flutuação lenta (slow fading)</i>	13
3.2.2	<i>Flutuação rápida (fast fading)</i>	13
3.3	Espalhamento do sinal (scattering)	14
3.3.1	<i>Espalhamento temporal</i>	14
3.3.2	<i>Espalhamento Doppler</i>	15
3.3.3	<i>Espalhamento angular</i>	15
3.4	Propagação multicaminhos	16
3.4.1	<i>Reflectores na proximidade do receptor móvel</i>	16
3.4.2	<i>Reflectores afastados do receptor móvel</i>	16
3.4.3	<i>Reflectores na proximidade da base</i>	16
3.4.4	<i>Exemplo típico em GSM</i>	17
<b>4.</b>	<b>O modelo do sinal</b>	18
4.1	Móvel-base: utente único-antena simples/antena múltipla (SU-SIMO)	18
4.2	Móvel-base: utente múltiplo-antena simples/antena múltipla (MU-SIMO)	19
4.3	Base-móvel: utente único-antena simples/antena múltipla (SU-MISO)	19
4.4	Base-móvel: utente múltiplo-antena simples/antenas múltipla (MU-MISO)	20
4.5	Modelo discreto do sinal no domínio do tempo	21
4.6	Modelo de sinal e interferências	23
<b>5.</b>	<b>Processamento do sinal na transmissão móvel-base</b>	24
5.1	Processamento no domínio temporal: equalização	24
5.2	Processamento no domínio espacial: beamforming	26
<b>6.</b>	<b>Processamento no domínio espacio-temporal</b>	29
6.1	Caso geral ou do utente único	29
6.1.1	<i>Máximo de Verossimilhança (MV)</i>	29
6.1.2	<i>Mínimos Erros Médios Quadrados (MEMQ)</i>	30
6.1.3	<i>MV versus MEMQ</i>	32

6.2	Sistema com tramas de treino . . . . .	32
6.3	Sistema sem tramas de treino . . . . .	33
6.3.1	<i>Utilização da estrutura espacial</i> . . . . .	33
6.3.2	<i>Utilização da estrutura temporal</i> . . . . .	36
6.4	Caso multi-utente . . . . .	38
6.4.1	<i>Métodos MV e MEMQ multi-utente</i> . . . . .	38
6.4.2	<i>Métodos sem trama de treino multi-utente</i> . . . . .	38
<b>7.</b>	<b>Processamento do sinal na transmissão base-móvel</b> . . . . .	<b>42</b>
7.1	Modelo do sinal base-móvel . . . . .	42
7.2	Estimação do canal base-móvel . . . . .	42
7.3	Processamento espacio-temporal na transmissão base-móvel . . . . .	43
7.3.1	<i>Caso do utente único</i> . . . . .	43
7.3.2	<i>Caso multi-utente</i> . . . . .	43
<b>8.</b>	<b>Estimação dos parâmetros multi-caminhos</b> . . . . .	<b>45</b>
8.1	Continuum espacio-temporal . . . . .	45
8.2	Estimador do máximo de verosimilhança . . . . .	46
<b>9.</b>	<b>Processamento espacio-temporal em CDMA</b> . . . . .	<b>48</b>
9.1	Introdução . . . . .	48
9.2	Modelo do sinal . . . . .	48
9.3	Processamento só no domínio temporal . . . . .	49
9.3.1	<i>Caso do utente único</i> . . . . .	49
9.3.2	<i>Caso multi-utente</i> . . . . .	50
9.3.3	<i>Receptores em tramas de treino</i> . . . . .	52
9.4	Processamento espacio-temporal em CDMA . . . . .	52
9.5	CDMA na transmissão base-móvel . . . . .	53
<b>10.</b>	<b>Aplicações do processamento espacio-temporal</b> . . . . .	<b>54</b>
10.1	“Switched-beam systems” . . . . .	54
10.2	Filtragem espacio-temporal . . . . .	54
10.3	Reutilização intra-célula . . . . .	54
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>55</b>
	<b>Trabalhos Práticos</b> . . . . .	<b>56</b>
	TP1 - Modulação AM . . . . .	56
	TP2 - Modulação analógica não linear . . . . .	58
	TP3 - Sinalização e Detecção em banda base . . . . .	60
	TP4 - Transmissão de sinais PAM em canais de banda limitada . . . . .	66
	TP5 - Processamento espacial de sinais: “Beamforming” . . . . .	71

## 1. Introdução

O tema das comunicações móveis está na moda. A tecnologia chegou e em poucos anos adquiriu já um número considerável de assinantes com um crescimento sustentado de mais de 40% por ano. Nalguns países ou regiões, em que a rede fixa era deficiente ou insuficiente, a rede móvel implanta-se com mais facilidade e produz mesmo uma diminuição dos assinantes da rede fixa, levando, a médio ou a longo prazo, a um provável desaparecimento desta. A implantação de uma rede moderna, com poucos custos de manutenção e completamente digital possibilita um sem número de serviços até agora desconhecidos. Porém este sucesso necessita um enorme acompanhamento em meios tecnológicos de forma a disponibilizar o acesso de comunicações em crescimento quase exponencial: mais utilizadores, mais dados, maior cobertura e maior qualidade de recepção.

Para manter este ritmo as redes de comunicação móveis (RCM) enfrentam um grande número de desafios: (a) o meio de propagação do sinal é rapidamente variável no espaço e no tempo, conforme o emissor ou receptor se deslocam, (b) a banda de frequências disponíveis é limitada, (c) as baterias dos telefones portáteis tem uma duração limitada, (d) uma crescente necessidade de transmissão de cada vez maior volume de dados, (e) melhor recepção em todo o tipo de terreno incluindo dentro de edifícios, (f) melhor cobertura, (g) melhor qualidade de recepção (reconhecimento da voz), etc...

Os sistemas de RCM actuais utilizam um processamento do sinal tipicamente temporal através da reutilização da mesma banda de frequência por diferentes utilizadores o que provoca interferência entre canais e limita o número de utilizadores ao número de bandas disponíveis. Nesta disciplina de opção apresentam-se as ideias de base que levarão as RCM do futuro à exploração da componente espacial em simultâneo com a componente temporal. Na prática, se o sinal recebido a uma determinada frequência numa estação de solo for identificado com uma determinada direcção no espaço poder-se-á utilizar a mesma frequência para um outro sinal associado a uma outra direcção. Claro que esta ideia só é aplicável na medida em que a discriminação angular de cada sinal é suficiente e quando os utilizadores se deslocam relativamente lentamente (caso dos peões ou automóveis a baixa velocidade). Além da reutilização das frequências o processamento espacio-temporal do sinal permitirá: (a) aumentar o ganho em relação sinal/ruído, (b) uma maior imunidade a interferências e (c) melhorar (nalguns casos) a interferência inter-símbolos. Em contrapartida o processamento espacio-temporal necessita: (a) um número superior de emissores/receptores e (b) um maior processamento de sinal.

No seguimento desta disciplina vamos começar por passar em revista o desafio que representa o melhoramento das RCM por inclusão do domínio espaço-tempo. Em seguida vamos descrever o modelo do canal de propagação em RCM, quais as suas principais características e factores de deterioração. Finalmente passaremos em revista os diferentes tipos de comunicação: telefone móvel - estação e estação - telefone móvel seja para telefones de alta ou baixa mobilidade. Falaremos depois nas diferenças entre os casos utilizador-simples e multi-utilizador. Finalmente passaremos em revista os métodos e técnicas disponíveis para enfrentar o problema.

## 2. O desafio do processamento espacio-temporal em RCM

Neste capítulo vamos começar por motivar a necessidade da introdução da componente espacial em RCM. Em seguida vamos expôr brevemente aquilo que se entende por processamento espacial do sinal, a noção de ângulo de chegada e a sua estimação, e finalmente a formulação de um formador de feixes ou “beamformer”. O sinal proveniente de um processamento multicanais adquire assim uma dimensão suplementar que é a de ângulo de chegada: a partir desse ponto a sua manipulação torna-se bidimensional o que implica convoluções, transformadas de Fourier e correlações a duas dimensões. Faremos então uma breve revisão destes conceitos, que não são mais do que extensões das definições das respectivas manipulações a uma dimensão.

### 2.1 Motivação

Uma das actuais limitações em RCM é devida ao processamento temporal do sinal que não combate de modo eficiente a reutilização de frequências em zonas limítrofes entre células, resultando em interferências entre canais contíguos (co-channel interference, CCI). Uma das formas de limitar o problema do CCI é de utilizar sistemas de transmissão e recepção capazes de utilizar a informação de vários emissores/receptores de forma coerente: se a cada utilizador for associada não só uma frequência e um “slot” temporal ou frequencial mas também uma direcção espacial, utilizadores em zonas diferentes podem, ao mesmo tempo, utilizar a mesma frequência podendo ser discriminados através da sua direcção. O facto de aumentar uma dimensão no sistema permite aumentar a capacidade da rede (mais postos em simultâneo), aumentar a cobertura (porque se aumenta o ganho visto que se utiliza o “mesmo” sinal recebido em vários captosres beneficiando de uma aumento do ganho de antena) e a qualidade da recepção (visto que se diminui a CCI). Estes ganhos são possíveis porque se aumentou, tanto na transmissão como na recepção, o factor de diversidade e o ganho de antena. O factor de diversidade está ligado a adição de uma dimensão o que faz com que dois telefones, mesmo utilizando a mesma frequência, continuam a ser “diferentes” visto que se encontram em pontos diferentes do espaço e por isso são vistos pelo sistema como diferentes. O ganho de antena é devido ao facto que o sinal é transmitido, não através de uma antena, mas através de várias antenas em simultâneo, essa transmissão faz-se não para todo o espaço de forma uniforme e indiscriminada mas sómente numa dada direcção correspondente à posição do telefone em questão. O mesmo é aplicável à recepção.

### 2.2 Processamento espacial de sinais

Um sistema de processamento de sinal espacio-temporal utiliza o sinal temporal recebido simultaneamente em vários receptores colocados em pontos distintos do espaço formando uma antena de receptores (array). Conhecendo a posição relativa dos receptores, a combinação coerente dos sinais recebidos permite determinar a direcção (e até a posição) do emissor. Para fixar as ideias vamos colocar-nos no caso simples de um emissor  $E$  e de dois receptores  $R_1$  e  $R_2$  como indicado na figura 2.1.

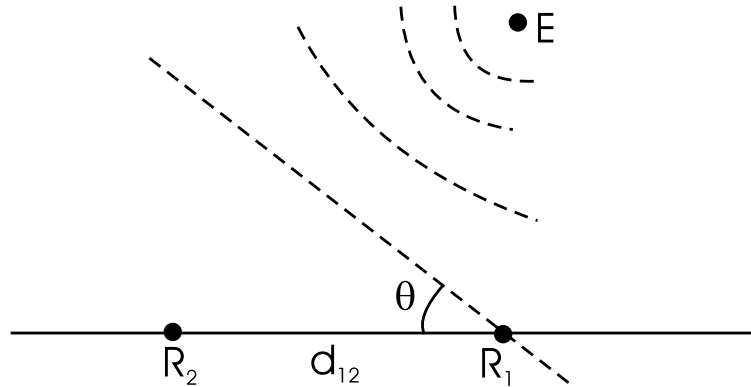


Figura 2.1: recepção de um onda plana com dois capttores

Considerando que a distância entre a fonte e qualquer um dos receptores é muito grande em relação à separação entre os receptores podemos aproximar a frente de onda do sinal que se propaga entre  $R_1$  e  $R_2$  por uma onda plana. Assim, o ângulo  $\theta$  entre a linha que contém os dois receptores e a normal à frente de onda é

$$\theta = \arcsin \frac{c\Delta t}{d_{12}} \quad (2.1)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação no meio,  $\Delta t$  é o atraso temporal do sinal entre  $R_1$  e  $R_2$  e finalmente  $d_{12}$  é a distância entre os dois receptores. Este exemplo muito simples ilustra aquilo que é o princípio de um *formador de feixes* ou *beamformer*, cujo objectivo é o de determinar o ângulo de proveniência do sinal da fonte a partir do conhecimento da separação entre os capttores, do atraso temporal entre eles e da velocidade de propagação do sinal no meio. Na prática, o formador de feixes mais simples, e muito parecido com o da figura 2.1, é aquele formado pelos nossos ouvidos e o nosso cérebro: os primeiros são os capttores e o segundo é o “processador” que de forma natural e imperceptível faz o cálculo da direcção da fonte e transmite aos olhos e aos outros sentidos a noção da direcção de proveniência do som.

### 2.3 Formador de feixes (beamformer)

A questão que nos podemos colocar agora é: como é que este problema da determinação da direcção da fonte tem um papel importante em RCM? Para responder a esta pergunta torna-se necessário introduzir uma segunda etapa de processamento que é “o processamento coerente”. Processamento coerente implica processamento em fase do sinal. A ideia de base é que a saída de um somador de sinais passará por um máximo quando os sinais estiverem em fase! Para uma melhor compreensão

desta afirmação vamos de novo recorrer a um exemplo. Consideremos a figura 2.2. Nesta figura encontram-se representados  $L$  captores colocados de forma regular ao longo de uma linha. Cada uma das saídas desses captores, denominada  $y_l(t)$ , encontra-se atrasada de um valor  $\tau_l$  e em seguida introduzida num somador formando

$$b(t) = \sum_{l=1}^L y_l(t - \tau_l) \quad (2.2)$$

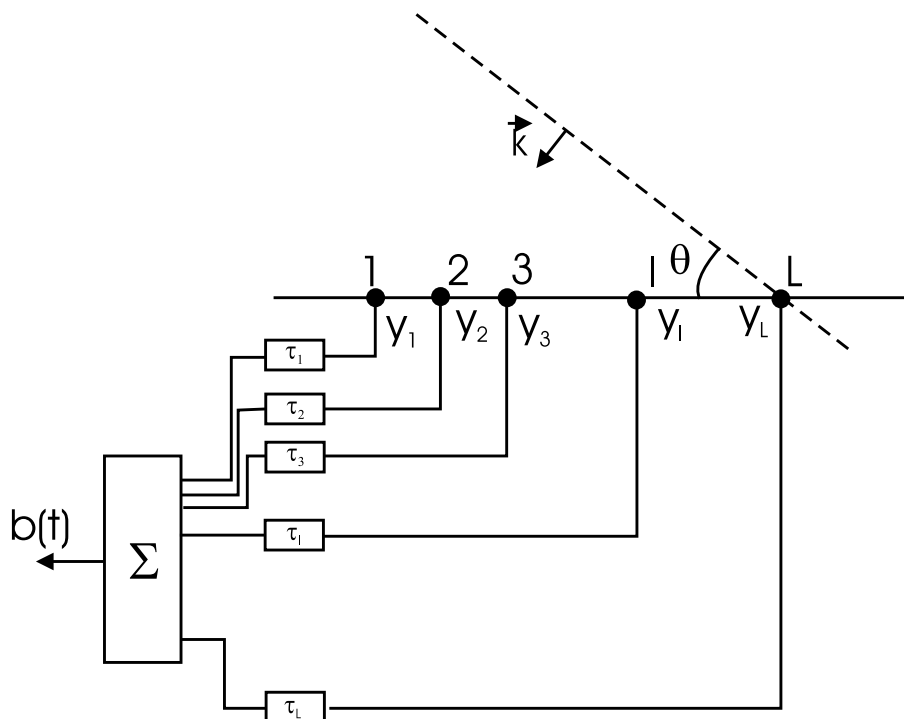


Figura 2.2: recepção de uma onda plana numa antena linear multicaptor.

Vamos agora supor que o sinal recebido em cada captor é a soma de um sinal útil e um ruído (ou interferência) de média nula e não correlado com o sinal nem com os sinais e ruídos recebidos nos outros captores. Assim

$$y_l(t) = x_l(t) + \epsilon_l(t) \quad (2.3)$$

com

$$E[x_l(t)\epsilon_m(t)] = 0 \quad E[\epsilon_l(t)\epsilon_m(t)] = \sigma^2\delta_{lm} \quad (2.4)$$

e onde  $\delta_{lm}$  é o símbolo de Kronecker tal que

$$\delta_{lm} = \begin{cases} 0 & l \neq m \\ 1 & l = m \end{cases}$$

e ainda que o sinal útil é uma onda plana monocromática de frequência  $\omega_0$  tal que em cada captor  $l$  se escreve

$$x_l(t) = Ae^{j\omega_0(t+\Delta_{1l})} \quad (2.5)$$

onde  $\Delta_{1l}$  é o atraso sofrido pelo sinal entre o captor 1 e o captor  $l$ ,

$$\Delta_{1l} = \frac{(l-1)d}{c} \sin \theta_0. \quad (2.6)$$

Se substituirmos (2.5) em (2.3) e o resultado em (2.2) obtemos

$$b(t) = \sum_{l=1}^L A e^{j\omega_0(t+\Delta_{1l}-\tau_l)} + \epsilon_l(t - \tau_l) \quad (2.7)$$

Se, de acordo com (2.1), os atrasos incluídos em cada captor antes do somador forem exactamente iguais ao verdadeiro atraso da onda plana recebida, i.e.,  $\theta = \theta_0$ , temos que

$$b(t, \theta_0) = A e^{j\omega_0 t} L + \sum_{l=1}^L \epsilon_l(t - \tau_l). \quad (2.8)$$

nesta altura dizemos que os atrasos estão ajustados para a direcção  $\theta_0$ , ou que estamos a “olhar” para a direcção  $\theta_0$ . Se pelo contrário os atrasos se encontrarem ajustados para uma direcção  $\theta \neq \theta_0$  temos que

$$b(t, \theta) = A e^{j\omega_0 t} \sum_{l=1}^L e^{j\omega_0(\Delta_{1l}-\tau_l)} + \epsilon_l(t - \tau_l) \quad (2.9)$$

i.e.,

$$b(t, \theta) = A e^{j\omega_0 t} \sum_{m=0}^{L-1} e^{j \frac{\omega_0 m d}{c} (\sin \theta_0 - \sin \theta)} + \sum_{l=1}^L \epsilon_l(t - \tau_l) \quad (2.10)$$

O somatório é uma progressão geométrica de  $L$  termos resultando em

$$b(t, \theta) = A e^{j\omega_0 t} e^{j \frac{\omega_0 d}{2c} (L-1) (\sin \theta_0 - \sin \theta)} \frac{\sin \frac{Ld}{2c} \omega_0 (\sin \theta_0 - \sin \theta)}{\sin \frac{d}{2c} \omega_0 (\sin \theta_0 - \sin \theta)} + \sum_{l=1}^L \epsilon_l(t - \tau_l) \quad (2.11)$$

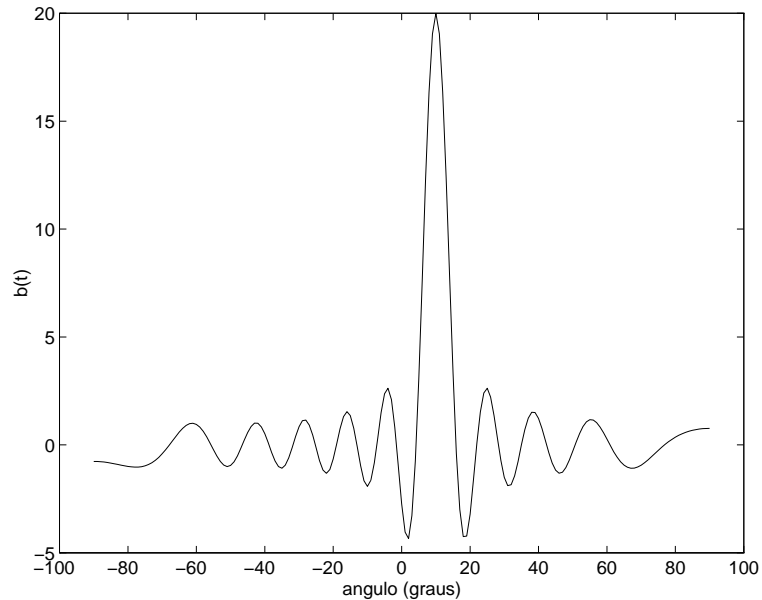


Figura 2.3: *beam pattern* para a antena linear de  $L = 20$  captores e  $d = \lambda/2$ .



A expressão do quociente entre os dois senos é normalmente chamada “beam pattern” para o caso da antena linear equiespaçada e a sua evolução em função de  $\theta$  encontra-se representada na figura 2.3 para  $d = \lambda/2$  (onde  $\lambda = c/f$  é o comprimento de onda),  $L = 20$  e para uma direcção de chegada da onda plana  $\theta_0 = 10^\circ$ . Podemos ver neste caso que o ganho da antena é, como previsto no primeiro termo de (2.8), exactamente igual ao número  $L$  de captosres quando  $\theta = \theta_0$  e diminui com oscilações variáveis (tipo  $\sin x/x$ ) à medida que  $\theta$  se afasta de  $\theta_0$ . Dado que o ruído é não correlado temporal e espacialmente, temos que o segundo termo de (2.7) corresponde a uma somatório de  $L$  processos independentes ou, para ser mais preciso, se fixarmos o tempo  $t$ , temos  $L$  variáveis aleatórias independentes. Assim podemos dizer que

$$E[b(t)] = Lx(t) \quad (2.12a)$$

e

$$V[b(t)] = L\sigma^2 \quad (2.12b)$$

o que resulta num ganho em relação sinal ruído proporcional a

$$SNR \propto \frac{L^2 x^2(t)}{L\sigma^2} = L \quad (2.13)$$

quando  $\theta = \theta_0$  e inferior a este valor à medida que nos afastamos de  $\theta_0$  segundo a evolução da figura 2.3. As conclusões que podemos tirar deste exemplo são de vária ordem:

- a) o facto de ajustarmos os atrasos de forma a estes compensarem os atrasos físicos do sinal nos captosres da antena permite que estes sejam adicionados em fase.
- b) em presença de ruído branco no espaço e no tempo permite obter um ganho proporcional ao número de captosres da antena.
- c) uma variação contínua dos atrasos impostos às saídas dos captosres de forma a variar a direcção de escuta ao longo de todos os ângulos possíveis permite determinar a direcção de chegada  $\theta_0$  como sendo aquela associada com o máximo do sinal de saída  $b(t)$ .

Em resumo, a cada fonte emissora pode ser associada uma direcção que corresponde ao máximo da função  $b(t)$  correspondente, permitindo um factor de “rejeição” no pior dos casos da ordem da diferença em dB’s entre o pico principal e o maior pico lateral (da ordem de 7 dB para o exemplo da figura 2.3). Este raciocínio é evidentemente extensível ao caso de múltiplas fontes apesar do cálculo não ser tão simples como neste exemplo e a “beam pattern” ser bastante mais complexa.

Um outro factor a ter em conta, e que está implícito no exemplo acima, mas talvez tenha passado despercebido é o facto de que para que se possam realizar os atrasos de forma correcta é necessário conhecer *a priori* e de forma precisa a velocidade de propagação no meio e a posição de cada um dos captosres pelo menos relativamente a um deles ou relativamente a um referencial. No caso particular da antena linear alinhamos os captosres ao longo do eixo de referência de forma a simplificar os cálculos. No caso geral o atraso é dado pelo produto interno entre o vector de localização de cada sensor e o vector de onda  $\kappa$  da direcção em questão.

## 2.4 Processamento de sinais multidimensionais

### 2.4.1 Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier (TF) foi utilizada no passado para representar um sinal temporal no domínio da frequência por uma soma de sinusóides colocadas a frequências espaçadas a intervalos constantes. Por extensão podemos definir uma TF a quatro dimensões permitindo transformar um sinal que se propaga simultaneamente no espaço (3 dimensões) e no tempo (1 dimensão), obtendo o espectro “frequência número de onda”  $S(\mathbf{k}, \omega)$

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \int \int s(\mathbf{r}, t) \exp[-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\mathbf{r} dt \quad (2.14)$$

onde uma das integrais é tripla porque diz respeito às três dimensões do vector diferencial  $d\mathbf{r}$ . O vector número de onda  $\mathbf{k}$  pode ser considerado como uma frequência espacial do espaço  $\mathbf{r}$  assim como  $\omega$  é a frequência temporal do tempo  $t$ . O espectro  $S(\mathbf{k}, \omega)$  é a representação no domínio da frequência (espacial e temporal) do sinal espacio-temporal  $s(\mathbf{r}, t)$ .

Consideremos a onda plana propagando na direção  $\mathbf{k}_0$  à frequência  $\omega_0$

$$s(\mathbf{r}, t) = \exp[j(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})] \quad (2.15)$$

Usando a notação de (2.14) a TF de (2.15) pode ser escrita

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \int \int \exp[-j(\omega - \omega_0)t + j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r} dt \quad (2.16)$$

Neste caso a solução de (2.16) é particularmente simples porque os integrais são separáveis para cada uma das dimensões obtendo-se quatro factores do tipo

$$I(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\mu x} dx$$

cuja solução é  $I(\mu) = \delta(\mu)$ . Assim o resultado de (2.16) escreve-se

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.17)$$

Este resultado quer dizer que o espectro número de onda de uma onda plana monocromática se reduz a um ponto de coordenadas  $(\mathbf{k}_0, \omega_0)$ . Temos portanto uma analogia directa entre a sinusóide no domínio temporal que se reduz a um ponto no domínio da frequência temporal e a onda plana que se reduz no domínio frequência número de onda também a um ponto.

Inversamente se o espectro número de onda for integrável podemos calcular a TF inversa (TFI) e reconstituir o sinal no domínio espacio-temporal

$$s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi^4} \int \int S(\mathbf{k}, \omega) \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\mathbf{k} d\omega \quad (2.18)$$

Esta equação é muito interessante se notarmos que o expoente é exactamente o de uma onda plana. Assim poderíamos dizer que qualquer sinal espacio-temporal pode ser formado por uma soma infinita de ondas planas de (micro) amplitude  $S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega / 2\pi^4$ .

### 2.4.2 Convolução

É particularmente interessante estabelecer a equação de convolução no caso multidimensional pois é a equação dominante sempre que encontrarmos problemas de filtragem espacio-temporal, com vista a retirar do espectro temporal ou do espectro frequência-número de onda componentes indesejáveis. Assim podemos facilmente estender o conceito aplicável a sistemas lineares invariantes e dizer que o espectro número de onda  $S(\mathbf{k}, \omega)$  se encontra filtrado pelo filtro espacio-temporal  $H(\mathbf{k}, \omega)$  tal que o sinal de saída  $Y(\mathbf{k}, \omega)$  se escreve

$$Y(\mathbf{k}, \omega) = H(\mathbf{k}, \omega)S(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.19)$$

e então estabelecer a equação de convolução correspondente através da TFI de (2.19)

$$y(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{r} - \mathbf{u}, t - \tau) s(\mathbf{u}, \tau) d\mathbf{u} d\tau \quad (2.20)$$

onde  $h(\mathbf{r}, t)$  é a resposta impulsiva do filtro.

### 3. O canal de comunicação

O objectivo deste capítulo é de descrever as modificações sofridas pelo sinal rádio entre o emissor e o receptor quer seja na direcção base-móvel ou móvel-base. O estudo destas modificações permitirá estabelecer um modelo do canal de transmissão capaz de representar o seu comportamento em sinais simulados e estabelecer estratégias para melhorar o desempenho do sistema de RCM.

É óbvio que, na maior parte dos casos, o sinal se transmite entre o emissor e o receptor através de um grande número de caminhos, chamados caminhos múltiplos (multipath), devido a reflexões em obstáculos, refração no meio de propagação, dispersão e difração. Devido essencialmente a perdas de transmissão o sinal recebido é de amplitude muito inferior à do sinal emitido. Estas perdas de transmissão podem ser atribuídas essencialmente a dois mecanismos de origens distintas: perda de transmissão média (mean geometrical spreading) e flutuações na amplitude do sinal (fading) que podem ser rápidas (fast fading) ou lentas (slow fading). As perdas médias seguem uma lei que é inversamente proporcional ao quadrado da distância e resultam da absorção no meio e a reflexões em superfícies parcialmente absorventes. O “slow fading” deve-se ao efeito de interposição de superfícies fortemente reflectantes tais como edifícios e/ou obstáculos naturais; por vezes o “slow fading” também tem um efeito de sombra na recepção. O “fast fading” resulta de um espalhamento da energia nos obstáculos junto ao receptor móvel. Finalmente o facto do sinal atingir o receptor através de caminhos múltiplos resulta em que a energia não chega em bloco mas sim ao longo de um certo tempo devido aos diferentes atrasos provocados pelos diferentes caminhos: isto é chamado espalhamento temporal. A este espalhamento temporal encontra-se associado um espalhamento frequencial devido ao facto de alguns dos obstáculos se encontrarem em movimento relativamente ao emissor e/ou receptor. Finalmente visto que o sinal chega à fonte/receptor reflectido em vários obstáculos ele não tem uma única direcção privilegiada mas sim várias direcções: isto toma o nome de espalhamento angular.

#### 3.1 Perdas de transmissão

Em espaço aberto ideal, as perdas de transmissão são inversamente proporcionais ao quadrado da distância, assim a potência recebida  $P_r$  em função da potência transmitida  $P_t$ , escreve-se

$$P_r = P_t \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 G_t G_r \quad (3.1)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda,  $d$  é a distância e  $G_t$  e  $G_r$  são os ganhos das antenas de transmissão e recepção respectivamente. Geralmente no caso dos telemóveis o caminho directo é sempre acompanhado por uma reflexão de solo e assim as perdas relativas ao conjunto dos dois caminhos podem ser aproximadas por

$$P_r = P_t \left( \frac{h_t h_r}{d^2} \right)^2 G_t G_r \quad (3.2)$$

onde  $h_t$  e  $h_r$  são as elevações em relação ao solo do transmissor e do receptor respectivamente. A equação (3.2) efectivamente significa que as perdas no caso dos receptores móveis seguem uma lei que é inversamente proporcional à quarta potência da distância, i.e., equivalente a uma perda de 40

dB/década. Na prática mede-se que o expoente da distância varia entre 2.5 em meios fracamente atenuados até 5 em meios com forte atenuação (multipath complexo).

### 3.2 Perdas por flutuação do sinal (fading)

As perdas por flutuação do sinal (fading) adicionam-se às perdas de transmissão. As variações do nível do sinal recebido ao longo do tempo  $\alpha(t)$  é tipicamente formado por duas componentes multiplicativas tal que

$$\alpha(t) = \alpha_r(t)\alpha_s(t) \quad (3.3)$$

onde  $\alpha_r(t)$  e  $\alpha_s(t)$  estão respectivamente associadas com o “fast fading” e o “slow fading” descritos anteriormente. Veremos mais à frente que o termo  $\alpha_s(t)$  corresponde a uma modulação do sinal  $\alpha_r(t)$  ou, por outras palavras, representa o envelope de  $\alpha(t)$ .

#### 3.2.1 Flutuação lenta (slow fading)

A flutuação lenta (slow fading) da amplitude do sinal é portanto devida ao efeito de sombra causado por edifícios, construções ou obstáculos encontrados pelo sinal ao longo do seu percurso. De alguma forma as flutuações de amplitude causadas por estes obstáculos são altamente variáveis de caso para caso e ao longo do tempo. Podemos alternativamente considerar que o slow fading representa a média local dos efeitos da flutuação rápida (fast fading). Compreende-se então que só uma abordagem estatística é possível. A distribuição resultante foi largamente estudada na prática e depende essencialmente de factores como: a altura das antenas, a frequência e o tipo de meio ambiente considerado. Tem sido observado que a média da potência do sinal recebido perturbado por fast fading (também conhecido por Rayleigh fading) aproxima-se de uma distribuição normal quando representada numa escala logarítmica. Esta distribuição chama-se log-normal e tem a seguinte densidade de probabilidade

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

onde  $x$  é uma VA que representa a variação lenta da amplitude do sinal,  $\mu$  e  $\sigma$  são a média e o desvio padrão respectivamente (expressos em dB's). Um valor típico para  $\sigma$  é 8 dB.

#### 3.2.2 Flutuação rápida (fast fading)

Como já tivemos ocasião de referir as flutuações rápidas da amplitude do sinal no receptor (emissor) encontram-se representadas pelo termo  $\alpha_r(t)$  em (3.3) e devem-se às reflexões e espalhamento do sinal nos objectos próximos do receptor (emissor). Mais uma vez, na impossibilidade de dispor de uma geometria fixa do meio ambiente em torno do receptor (emissor) só uma aproximação estatística é possível, assim, se considerarmos um grande número de frentes de onda reflectidas de forma imprecisa (espalhadas) com amplitudes e ângulos de chegada aleatórios e fases uniformemente

distribuídas em  $[0, 2\pi]$ , demonstra-se que as componentes ortogonais do campo eléctrico vertical são processos Gaussianos. Neste caso, o envelope do sinal recebido segue uma distribuição de Rayleigh com uma densidade

$$p(y) = \begin{cases} \frac{y}{\sigma^2} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Se existir um caminho directo entre o emissor e o receptor então a distribuição já não será Rayleigh mas sim seguirá uma distribuição de Rice cuja densidade se escreve

$$p(y) = \begin{cases} \frac{y}{\sigma^2} \exp(-\frac{(y^2+s^2)}{2\sigma^2}) J_0(\frac{ys}{\sigma^2}), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $s^2$  é a potência média do sinal recebido ao longo do caminho directo, e  $J_p$  é a função de Bessel de primeiro tipo modificada de ordem  $p$  (estas e outras distribuições podem ser encontradas, por exemplo, em Abramowitz [1]).

### 3.3 Espalhamento do sinal (scattering)

Falámos já das consequências do efeito de espalhamento do sinal na proximidade do receptor e ao longo do percurso entre emissor e o receptor, que dão origem ao fast fading e ao slow fading respectivamente. Mas o que é que se entende exactamente por espalhamento (scattering) e quais os seus outros efeitos já mencionados como o espalhamento no tempo, na frequência (doppler) e em ângulo? A característica essencial do espalhamento do sinal resultante da reflexão de uma onda plana monocromática numa superfície “não polida” é que o sinal reflectido já não tem uma única direcção, i.e., já não é uma onda plana. Isto deve-se ao facto de que a superfície em questão tem uma microestrutura (scatterers) que refletem a onda plana em várias direcções formando uma frente de onda difusa no espaço e no tempo. Eventualmente alguma energia encontra-se também reflectida na direcção da onda incidente e é perdida do ponto de vista do receptor.

#### 3.3.1 Espalhamento temporal

O espalhamento temporal é devido a reflexões múltiplas em obstáculos resultando numa ‘imagem’ recebida formada por várias réplicas do sinal emitido atenuadas e atrasadas umas em relação às outras segundo os caminhos percorridos. Típicamente as observações validam um modelo segundo o qual o atraso entre os caminhos aumenta exponencialmente com o número da réplica; da mesma forma a amplitude de cada réplica diminui exponencialmente com o atraso. Assim, pode-se dizer que o atraso entre as réplicas aumenta exponencialmente e a sua amplitude diminui com a mesma lei. Esta variação dos atrasos é chamado espalhamento temporal e provoca aquilo que se chama fading selectivo em frequência. É como se o efeito de fading agora fosse dependente da frequência o que acaba por determinar - e limitar - a selectividade da RCM. Mais claramente: quanto maior o espalhamento temporal menor a largura de banda na qual o sinal é coerente. A largura de banda na qual o sinal é coerente significa a separação máxima em frequência para a qual a resposta em frequência do canal é fortemente correlada. Óbviamente, quanto menor a largura de banda de coerência (relativamente à largura de banda do sinal) maior é a selectividade do canal.

### 3.3.2 Espalhamento Doppler

A flutuação rápida (fast fading) resulta do espalhamento por reflexão incoerente em obstáculos próximos do receptor (respectivamente emissor) tem como resultado também um espalhamento Doppler, i.e., um sinal monocromático incidente resulta, após reflexão, num banda finita de frequências. Em geral define-se o espectro de potência Doppler como sendo a TF da função de autocorrelação da resposta impulsiva do canal. Assim, o espalhamento Doppler define-se como sendo a largura de banda do espectro de potência Doppler.

Assumindo que os obstáculos se encontram uniformemente distribuídos no intervalo angular  $[0, 2\pi]$ , então a potência espectral em banda base do campo eléctrico vertical é

$$S(f) = \frac{3\sigma}{2\pi f_m} \left[ 1 - \left( \frac{f - f_c}{f_m} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad f_c - f_m < f < f_c + f_m \quad (3.7)$$

onde  $f_m = \nu/\lambda$  é o desvio Doppler máximo -  $\nu$  é a velocidade do receptor móvel -  $f_c$  é a frequência da portadora e  $\sigma$  é a potência média do sinal recebida numa antena isotrópica. O espectro Doppler dado por (3.7) é também conhecido por espectro clássico. Como no caso das flutuações rápidas, também aqui a existência de um caminho directo entre o emissor e o receptor (ou vice-versa), resulta num espectro alterado por uma componente adicional à frequência correspondente à velocidade relativa entre a base e o receptor móvel. O espectro Doppler escreve-se neste caso

$$S(f) + B\delta(f - f_D) \quad (3.8)$$

onde  $B$  é uma medida do rácio entre a energia directa sobre a energia reflectida (espalhada),  $f_D$  é o desvio Doppler do caminho directo e  $\delta(t)$  é obviamente a “função” de Dirac.

O espalhamento Doppler é por vezes também chamado flutuação temporal selectiva, isto porque a amplitude do sinal varia com o tempo. Esta variação temporal da amplitude do sinal depende obviamente da variação temporal do canal e define aquilo que toma o nome de coerência temporal do canal. O tempo de coerência representa o intervalo temporal dentro do qual as respostas impulsivas do canal são fortemente correladas. Para fixar as ideias podemos associar o tempo de coerência com o intervalo de tempo no qual a função de correlação entre dois processos aleatórios é superior a valor mínimo fixado. Como seria de prever, a partir da analogia tempo-frequência, o tempo de coerência é inversamente proporcional ao espalhamento Doppler - quanto maior o espalhamento Doppler menor o tempo de coerência e mais rapidamente o canal varia no tempo.

### 3.3.3 Espalhamento angular

O espalhamento angular tem a ver com o leque de direcções de chegada dos caminhos múltiplos no receptor (respectivamente emissor). O ângulo de chegada (respectivamente partida) encontra-se estatisticamente ligado ao atraso dos diferentes caminhos múltiplos. Um sinal associado com um maior ângulo de chegada (respectivamente um maior atraso) percorreu um caminho mais longo, teve mais reflexões e por isso encontra-se mais atenuado do que um outro sinal com menor ângulo,

menor atraso e menor atenuação. Isto significa que o espalhamento angular se traduz também numa variação da amplitude ao longo do espaço e consoante o receptor da antena. É o que se chama flutuação espacial selectiva que é caracterizada por uma distância de coerência espacial. Quanto maior o espalhamento angular menor a distância de coerência espacial. Mais uma vez, como no caso temporal, a coerência espacial representa a distância espacial máxima para a qual as respostas impulsivas do canal (em dois pontos) se encontram fortemente correladas.

### **3.4 Propagação multicaminhos**

O sinal que se propaga entre o emissor e o receptor no interior de uma célula sofre reflexões múltiplas e por consequência os três efeitos de espalhamento descritos acima. Os efeitos no canal de propagação serão descritos para o caso base-móvel mas, obviamente, são também válidos para o caso móvel-base.

#### **3.4.1 Reflectores na proximidade do receptor móvel**

São considerados reflectores locais aqueles edifícios ou outras superfícies na vizinhança (digamos algumas dezenas de metros) do receptor móvel. O movimento do receptor e as reflexões na sua vizinhança provocam espalhamento Doppler que, como foi dito acima, provoca flutuação temporal selectiva. Por exemplo, para um receptor móvel com uma velocidade de 100 km/h, o espalhamento Doppler é de 200 Hz na banda de 1900 MHz. Da mesma forma que os reflectores locais contribuem de forma significativa para o espalhamento Doppler, a sua influência no espalhamento temporal é insignificante devido à sua fraca distância média em torno ao receptor móvel. Pela mesma razão o espalhamento angular também é desprezível.

#### **3.4.2 Reflectores afastados do receptor móvel**

Os reflectores longínquos podem ser grandes edifícios, construções ou acidentes do terreno como colinas ou montanhas situados a grande distância do receptor móvel. Pela razão inversa à dos reflectores locais, os reflectores longínquos produzem espalhamentos temporais e angulares significativos.

#### **3.4.3 Reflectores na proximidade da base**

O emissor de base é em geral formado por uma antena elevada sobre o terreno na sua vizinhança. Esta antena pode ser simples (um único receptor) ou múltipla (receptores múltiplos). O efeito das reflexões das várias réplicas do sinal emitido pelo receptor móvel resultantes das reflexões longínquas, nos reflectores próximos da base tais como edifícios e acidentes de terreno provocam um forte espalhamento angular e respectiva flutuação espacial selectiva. Pode-se, numa primeira aproximação, considerar que este espalhamento angular é invariante ao longo da abertura espacial da antena no caso desta ser constituída de vários receptores (antena múltipla).



### 3.4.4 Exemplo típico em GSM

Em GSM (global system for mobile communication) que é um sistema de TDMA (time-division multiple access) com uma portadora de 900 MHz e uma largura de banda de 200 kHz temos um número típico de caminhos múltiplos entre 6 e 12. Para uma banda de 1800 MHz, chamada banda secundária em instalação em Portugal, os valores dos espalhamentos típicos encontram-se indicados na tabela 3.1.

Meio	Tempo	Ângulo	Doppler
Rural plano	$0.5 \mu s$	1 grau	190 Hz
Urbano	$5 \mu s$	20 graus	120 Hz
Montanhoso	$20 \mu s$	30 graus	190 Hz
Hipermercado	$0.3 \mu s$	120 graus	10 Hz
Dentro de casa	$0.1 \mu s$	360 graus	5 Hz

Tabela 3.1: Espalhamentos temporais, angulares e Doppler típicos para o sistema GSM a 1800 MHz em vários tipos de meio de propagação

O sistema GSM é também caracterizado por uma duração de cada símbolo de  $3.7 \mu s$ , um slot temporal curto de 0.577 ms e uma largura de banda de cerca de 200 kHz. Como o espalhamento temporal em terreno montanhoso (ver tabela 3.1) é muito elevado quando comparado com a duração do símbolo, verifica-se nesse caso uma forte interferência intersímbolica (ISI). No entanto como o slot temporal é curto as variações temporais do canal nesse intervalo são em geral pequenas.

## 4. O modelo do sinal

Uma vez que estudámos as características físicas do canal de transmissão podemos desenvolver um modelo do sinal para as aplicações espacio-temporais. Admitiremos que uma antena com vários receptores só está disponível na base e que o receptor móvel dispõe de um único sensor. Assim temos quatro tipos de combinações possíveis:

1. Móvel-base: utente único-antena simples/antena múltipla (SU-SIMO)
2. Móvel-base: utente múltiplo-antena simples/antena múltipla (MU-SIMO)
3. Base-móvel: utente único-antena simples/antena múltipla (SU-MISO)
4. Base-móvel: utente múltiplo-antenas simples/antena múltipla (MU-MISO)

É corrente considerar-se que o canal móvel-base e base-móvel é idêntico desde que as duas ligações sejam efectuadas ao mesmo tempo e à mesma frequência: este é chamado o princípio de reciprocidade. Em sistemas do tipo duplex por divisão temporal (TDD, time-division duplexing) aplica-se o princípio de reciprocidade desde que o tempo entre o frame de ida e o frame de volta seja pequeno quando comparado com o tempo de coerência do canal. Em sistemas do tipo duplex por divisão frequencial (FDD, frequency division duplexing), que é o mais utilizado nos sistemas móveis actualmente, a separação entre as frequências de ida e de retorno é de 5% da frequência média, o que significa que o princípio de reciprocidade não pode ser utilizado. No entanto, mesmo assim os canais de ida e retorno tem bastantes características comuns, como por exemplo, o número de caminhos múltiplos, respectivos atrasos e ângulos serão os mesmos. O mesmo não se poderá dizer das amplitudes e fases que serão, geralmente, quase completamente descorrelados. Em geral poderemos dizer que o canal de ida e de volta serão, no caso dos sistemas FDD, completamente descorrelados.

### 4.1 Móvel-base: utente único-antena simples/antena múltipla (SU-SIMO)

Este modelo trata do caso em que um utente único com uma única antena transmite para uma base com uma antena múltipla (um conjunto com vários receptores distribuídos no espaço). O sinal em banda base,  $x_i(t)$ , recebido pelo receptor  $i$  da base, que contem um total de  $m$  receptores, escreve-se

$$x_i(t) = \sum_{l=1}^L a_i(\theta_l) \alpha_l^R(t) u(t - \tau_l) + n_i(t) \quad (4.1)$$

onde  $L$  é o número de caminhos múltiplos,  $a_i(\theta_l)$  é a resposta do elemento  $i$  da antena ao caminho  $l$  vindo da direcção  $\theta_l$ ,  $\alpha_l^R$  é a flutuação complexa do caminho  $l$ ,  $\tau_l$  é o atraso do caminho  $l$ ,  $u(t)$  é o sinal transmitido - que depende da modulação empregue e da informação transmitida - e finalmente  $n_i(t)$  é o ruído suposto do tipo aditivo. A modulação do sinal  $u(t)$  depende do standard utilizado, por exemplo GSM em Portugal, utiliza-se uma modulação do tipo Gaussian minimum-shift keying (GMSK). Em binary phase-shift keying (BPSK) o sinal transmitido em banda base tem a seguinte forma

$$u(t) = \sum_k g(t - kT) s(k) \quad (4.2)$$

onde  $g(t)$  é a função formadora de impulso,  $T$  é o período e  $s(k)$  é a trama de bits. Até agora temos suposto que o inverso da largura de banda do sinal, i.e., a sua duração temporal, é grande comparada com o tempo de atraso máximo entre os captores da antena (i.e., o intervalo de tempo entre o captor mais próximo e o captor mais afastado). Em GSM a duração de cada frame é de  $5 \mu s$ , enquanto a atraso é, no máximo, de alguns ns. Esta hipótese é geralmente chamada “a hipótese de banda estreita”. Na realidade a duração do sinal é o inverso da largura de banda do sinal, porém não é apenas a largura de banda que se deverá ter em conta mas sim a largura de banda efectiva, que é a largura de banda de modulação mais o espalhamento doppler, mas este último é, comparativamente, desprezível. Portanto, os envelopes complexos dos sinais recebidos pelo mesmo caminho em diferentes captores são idênticos, excepto no que diz respeito às suas amplitudes e fases. Esta dependência da amplitude e fase do ângulo de chegada para cada caminho encontra-se representada na eq. (4.1) pelo elemento  $a_i(\theta_l)$ . Vamos definir agora uma notação em que agrupamos todas as dependências do caminho  $l$  recebidas nos  $m$  captores num vector de dimensão  $m$ ,

$$\mathbf{a}(\theta_l) = [a_1(\theta_l), a_2(\theta_l), \dots, a_m(\theta_l)]^t \quad (4.3)$$

onde a notação **bold** designa um vector e  $^t$  indica vector (ou matriz) transposto(a). Utilizando a notação (4.3) podemos re-escrever (4.1)

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{l=1}^L \mathbf{a}(\theta_l) \alpha_l^R(t) u(t - \tau_l) + \mathbf{n}(t) \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{n}(t)$  representam de forma evidente os vectores de dimensão  $m$  dos sinais e dos ruídos recebidos nos  $m$  captores ao longo da antena respectivamente.

#### 4.2 Móvel-base: utente múltiplo-antena simples/antena múltipla (MU-SIMO)

Neste caso temos múltiplos utentes utilizando cada uma uma antena única que transmitem para uma base que tem uma antena múltipla. Este caso deduz-se directamente do anterior, supondo que existem  $Q$  utilizadores, o sinal recebido na antena da base é uma soma (sobre os utilizadores) dos  $Q$  móveis,

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{l=1}^{L_q} \mathbf{a}(\theta_{lq}) \alpha_{lq}^R(t) u_q(t - \tau_{lq}) + \mathbf{n}(t) \quad (4.5)$$

onde o index  $q$  foi utilizado onde necessário.

#### 4.3 Base-móvel: utente único-antena múltipla/antena simples (SU-MISO)

Agora a base possui uma antena de múltiplos captores (neste caso emissores) e transmite para um móvel único que possui (sempre) um único captor. Na ligação base-móvel, os múltiplos caminhos que ligam o móvel à base serão os mesmos que ligam a base ao móvel. Neste caso porém e, contrariamente ao caso móvel-base, o processamento que tem em conta os caminhos múltiplos faz-se antes da transmissão e não à recepção. Por essa razão e, devido ao facto de que a antena na base

é múltipla, o sinal enviado para o canal de transmissão será direccional. Tomando como exemplo o caso da antena linear de captos descrito no capítulo 2, o “beampattern” de excitação do canal teria a forma representada na figura 2.3 e assim algumas direcções seriam mais excitadas que outras, podendo resultar, nalguns casos, em certos caminhos (ângulos) sem nenhuma excitação do sinal de saída. Neste ponto podemos considerar que a excitação de cada um dos caminhos múltiplos resulta numa ponderação espacial do sinal transmitido, que nós notaremos através de um vector  $\mathbf{w}$ , assim o sinal recebido terá a forma

$$x(t) = \sum_{l=1}^L \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_l) \alpha_l^F(t) u(t - \tau_l) + n(t) \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{w}$  é o vector de ponderação utilizado na transmissão e indica de alguma forma como é que o sinal emitido ataca o canal de transmissão, e  $^H$  indica complexo conjugado transposto. Todos os outros termos já foram definidos anteriormente e  $\alpha_l^F(t)$  representa o termo de flutuação para a ligação directa base-móvel. Nos sistemas em que o tempo de ida e volta (ping-pong time) é pequeno, sistemas TDD com forte tempo de coerência por exemplo, poderemos considerar que  $\alpha_l^F(t) = \alpha_l^R(t)$ . Inversamente para sistemas FDD,  $\alpha_l^F(t)$  e  $\alpha_l^R(t)$  terão a mesma distribuição estatística mas serão fortemente descorrelados entre si. Se além de uma simples ponderação de amplitude utilizada na transmissão, também for realizado algum processamento temporal, então teremos,

$$x_T(t) = \sum_i w_i^* x(t - t_i) \quad (4.7)$$

onde  $\{t_i\}$  é o conjunto de atrasos do sinal utilizados para processamento temporal e  $x_T(t)$  é o sinal processado temporalmente que se pode também escrever a partir de (4.6), condensando os coeficientes de ponderação em  $\bar{\mathbf{w}}_i = w_i \mathbf{w}$ ,

$$x_T(t) = \sum_i \bar{\mathbf{w}}_i^H \sum_{l=1}^L \mathbf{a}(\theta_l) \alpha_l^F(t - t_i) u(t - \tau_l - t_i) + n(t - t_i) \quad (4.8)$$

#### 4.4 Base-móvel: utente múltiplo-antena simples/antena múltipla (MU-MISO)

Finalmente, neste último caso focado aqui, o sinal é transmitido de uma base com uma antena constituída de vários captos para vários receptores móveis simultâneamente, mas cada um dos receptores só tem uma antena. Trata-se, como anteriormente, de uma generalização a utilizadores múltiplos do caso tratado em 4.3. Assumindo que existem  $Q$  utilizadores e que é efectuado só processamento espacial no emissor, temos que o sinal recebido pelo utilizador  $d \in [1, Q]$  é

$$x_d(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{w}_q^H \sum_{l=1}^{L_d} \mathbf{a}(\theta_{ld}) \alpha_{ld}^F(t) u_q(t - \tau_{ld}) + n_d(t) \quad (4.9)$$

Podemos observar que o utilizador  $d$  recebe as mensagens,  $u_q(t)$ , emitidas para todos os  $Q$  utilizadores, através de  $L_d$  caminhos múltiplos ponderadas pelos respectivos vectores  $\mathbf{w}_q$ . É aqui que

é importante fazer realçar a noção de ponderação dos utilizadores em que o peso dado ao utente  $d$  deve ser maximizado enquanto a dos outros utilizadores deverá ser minimizado de forma a evitar o cross-talk entre utilizadores no interior de uma mesma célula. Como no caso anterior poderíamos utilizar relações semelhantes a (4.7) e (4.8) para exprimir a utilização de processamento temporal no emissor.

#### 4.5 Modelo discreto do sinal no domínio do tempo

Na prática, o que interessa é realçar o papel da mensagem emitida e a sua recepção no móvel. Assim, é corrente exprimir-se o modelo do sinal transmitido (ou recebido) não a partir dos parâmetros físicos do canal como tempos de atraso, ângulos de chegada, etc... mas sim a partir da trama de bits directamente enviada, i.e., para o caso de modulação linear, a sequência  $s(k)$  da eq. (4.2). Sem voltar a repetir todas as equações já representadas para os casos dos capítulos 4.1 a 4.4, tomemos como exemplo o caso de utente único que transmite para uma base com uma antena múltipla (capítulo 4.1), neste caso, o sinal recebido à saída da antena múltipla da base, amostrado a uma frequência de amostragem  $f_s = 1/T$  igual à dos símbolos da trama de bits, escreve-se

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{H}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{x}(k)$  é agora um vector de dimensão  $m$ , de variável discreta  $k$  aos instantes  $t = t_0 + kT$ ,  $\mathbf{H}$  é uma matriz de dimensão  $m \times N$ , assumida como invariante no tempo para simplificar e tal que o seu elemento  $ij$  é dado por

$$[\mathbf{H}]_{ij} = \sum_{l=1}^L a_i(\theta_l) \alpha_l^R g[(M_d + \Delta - j)T - \tau_l], \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, N \quad (4.11)$$

onde a função  $g(t)$  é a função de modulação de impulso, de duração  $2\Delta T$ ,  $M_d$  é um número inteiro representando o maior dos atrasos entre os caminhos múltiplos.  $N$  é o comprimento do canal em períodos de símbolo,  $\mathbf{n}(k)$  é o ruído sob forma discreta. A relação (4.11) obtem-se a partir de (4.1) e (4.2) onde se supôs que o canal era invariante no tempo, e por isso  $\alpha_l^R(t) = \alpha_l^R$ . A discretização de (4.1) permite-nos escrever

$$x_i(kT) = \sum_l a_i(\theta_l) \alpha_l^R u(kT - \tau_l) + n_i(kT),$$

e respectivamente de (4.2)

$$u(kT - \tau_l) = \sum_{m=0}^{N-1} g(kT - \tau_l - mT) s(m).$$

Fazendo nesta segunda equação a mudança de variável  $j = k - m$  obtemos

$$u(kT - \tau_l) = \sum_{j=k}^{k-N+1} g(mT - \tau_l) s(k - j).$$

Para que a matriz  $\mathbf{H}$  seja efectivamente invariante no tempo o somatório nesta equação deverá ser independente de  $k$ . Para que assim seja basta-nos assegurar que o somatório seja efectuado nas  $N$  amostras anteriores ao momento de chegada da última réplica; seja  $M_d T$  o momento de chegada dessa última réplica e que, por uma questão de exactidão, a função formadora de impulso seja tomada no seu ponto central - instante  $\Delta T$ , então basta que o somatório seja efectuado entre  $(M_d + \Delta)T$  e  $(M_d + \Delta - N + 1)T$ . Assim temos que o sinal modulado se pode escrever

$$u(kT - \tau_l) = \sum_{j=0}^{N-1} g[(M_d + \Delta - j)T - \tau_l] s(k - j)$$

e por isso por substituição em  $x_i(kT)$ ,

$$x_i(kT) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_l a_i(\theta_l) \alpha_l^R g[(M_d + \Delta - j)T - \tau_l] s(k - j) + n_i(kT),$$

de onde podemos facilmente deduzir (4.11). Finalmente  $\mathbf{s}(k)$  é o vector com a trama de bits de comprimento  $N$

$$\mathbf{s}(k) = [s(k), s(k-1), \dots, s(k-N+1)]^t \quad (4.12).$$

Devemos para já notar a simplicidade do modelo descrito por (4.10) que é **linear** e por isso vai permitir a aplicação de um grande número de técnicas já existentes em processamento espacial do sinal. A eq. (4.10) pode, como habitualmente noutros contextos, ser vista de várias formas, como p.ex., determinar a trama de bits conhecendo  $\mathbf{x}(k)$  e  $\mathbf{H}$  ou inversamente determinar  $\mathbf{H}$ , conhecendo  $\mathbf{x}(k)$  e  $\mathbf{s}(k)$ , que não é mais do que o problema de determinar o canal de transmissão (ou os seus parâmetros) conhecendo o sinal emitido. Em termos práticos o problema é alternado, i.e., podem-se enviar sequências  $\mathbf{s}(k)$  conhecidas numa fase de treino para estimar o canal e em seguida enviar as mensagens onde a sua identificação se faz utilizando o conhecimento do canal préviamente adquirido, fazendo uma hipótese de estacionaridade do canal.

Mais uma nota para referir que o modelo (4.10) só é estritamente válido nos casos de modulação linear, que não é o caso do GSM e/ou GMSK. Existem porém estudos que indicam que se pode proceder a uma linearização do caso GMSK tal que um modelo linear do tipo de (4.10) seja aplicável.

Finalmente devemos referir que é frequente utilizar uma notação mais compacta (em blocos) para designar um conjunto de pings (ou snapshots) temporais sucessivos. Se considerarmos por exemplo  $M$  pings sucessivos entre  $k, \dots, k + M - 1$ , podemos escrever a eq. (4.10) como

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{H}\mathbf{S}(k) + \mathbf{N}(k) \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{N}$  são matrizes por blocos de dimensões respectivas  $m \times M$ ,  $N \times M$  e  $m \times M$ . Visto que, por definição, a mensagem enviada é constante ao longo do bloco de dados, a matriz  $\mathbf{S}$  é uma matriz de Toeplitz por blocos.

Recorde-se que uma matriz de Toeplitz é uma matriz que tem a particularidade de que cada diagonal é formada por elementos iguais, i.e.,

$$[\mathbf{T}]_{i,j} = t_{ij} = t_{i-1,j-1} \quad (4.14)$$

Em geral uma matriz de Toeplitz pode ser não quadrada. Se for quadrada e hermítica, então podemos dizer que se trata de uma matriz centro-simétrica e que tem a propriedade

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}\mathbf{T}^H\mathbf{J} \quad (4.15)$$

onde a matriz  $\mathbf{J}$  é chamada matriz de reflexão, e aparenta-se à matriz identidade, mas na qual a diagonal unitária é a diagonal perpendicular à diagonal principal,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

em particular temos a propriedade  $\mathbf{J}\mathbf{J} = \mathbf{I}$ .

#### 4.6 Modelo de sinal e interferências

No capítulo 4.4 tivemos já a ocasião de falar do problema de cross-talk entre utilizadores em células vizinhas. Este problema deve ser equacionado através da noção de interferência para o qual se deverá estabelecer um modelo. Na prática a relação sinal/interferência (SIR = signal-to-interference ratio), também chamado o rácio de protecção, depende do factor de reutilização, i.e., do número de células contíguas nas quais uma dada frequência não é reutilizada para evitar o problema de cross-talk. Assim, quanto maior for o factor de reutilização,  $K$ , maior será o rácio de sinal/interferência. Por exemplo no standard IS-54 o factor  $K = 7$  e o SIR=18.7 dB e em GSM com  $K = 4$  temos que o SIR=13.8 dB. Em CDMA o factor de reutilização da frequência é  $K = 1$ , o que significa que todas as células podem utilizar a mesma frequência, aumentando assim o risco de cross-talk.

O modelo completo depois de introduzida a noção de interferência pode ser escrito, por exemplo para o caso SU-SIMO, como

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{H}_d\mathbf{s}_d(k) + \sum_{q=1}^{Q-1} \mathbf{H}_q\mathbf{s}_q(k) + \mathbf{n}(k) \quad (4.17)$$

onde o índice  $d$  traduz o canal  $\mathbf{H}_d$  e a trama de bits  $\mathbf{s}_d$  pertencente à fonte desejada, enquanto o índice genérico  $q$ , sobre o qual é efectuado o somatório, designa todos os outros utilizadores na mesma célula ou em células contíguas que utilizem a mesma frequência e contribuam assim para o cross-talk do utilizador  $d$ . No caso multi-utilizador (MU-SIMO) todos os  $Q$  sinais são desejados simultaneamente, enquanto no caso de ligação base-móvel a interferência é representada por outras bases em células contíguas.

## 5. Processamento do sinal na transmissão móvel-base

Neste capítulo, porventura o mais importante na compreensão da essência do processamento do sinal em RCM, vamos falar essencialmente de processamento espacio-temporal do sinal. Para atingir esse fim vamos primeiro ver o que entendemos por processamento no domínio temporal e processamento no domínio espacial separadamente e depois no domínio espaço-tempo em conjunto (cap. 6). Note-se que não se pretende de modo algum que a abordagem do domínio espaço-tempo seja em si uma novidade, porque não o é. Na realidade o processamento espacio-temporal em RCM pode (e deve) ser visto como uma evolução da área denominada processamento coerente multi-captadores ou “array processing” (o termo “processamento vectorial”, que seria a tradução literal não se adapta a este contexto). Existem tratados em processamento multi-captadores como por exemplo Johnson [2] e Krim [3]. Estas referências contêm exemplos aplicativos, a maior parte dos quais são no domínio do sonar e radar.

### 5.1 Processamento no domínio temporal: equalização

O processamento do sinal só no domínio temporal faz-se a partir da série temporal  $x(k)$  recebida num único captor e tem como objectivo estimar (o melhor possível) a trama de bits transmitida  $s(k)$ . Para tal, uma das tarefas é “retirar” do sinal recebido o efeito do canal, i.e., equalizar o efeito do canal no sinal recebido, daqui o nome de equalizador.

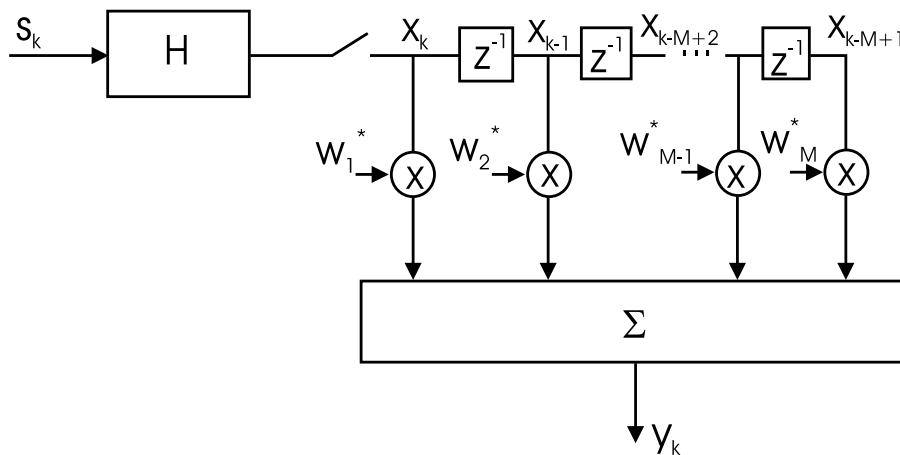


Figura 5.1: processamento temporal do sinal: equalizador.

Um equalizador não é mais do que um filtro que pretende, sob forma adaptativa ou não, processar o sinal recebido de forma a compensar o efeito introduzido pelo canal de transmissão no sinal recebido. Talvez a estrutura mais básica para um equalizador seja a do equalizador linear da figura 5.1. Nesta figura podemos ver o sinal recebido  $x(k)$ , já amostrado a uma frequência maior ou igual à da trama de bits de entrada (baud rate). Um dos objectivos do equalizador ao filtrar o sinal



recebido é o de compensar os efeitos produzidos pelo canal e em particular o efeito dos caminhos múltiplos. Quem diz caminhos múltiplos diz atrasos múltiplos e assim o sinal recebido é, aliás como já vimos, uma sobreposição temporal de réplicas do sinal emitido parcial ou totalmente sobrepostas (devido aos atrasos dos caminhos múltiplos). Um dos efeitos mais perceptíveis desta sobreposição é de que um determinado símbolo emitido vai-se encontrar no sinal recebido repetido várias vezes e (temporalmente) sobreposto a outros símbolos da mensagem - é o que se chama Interferência Inter-simbólica (inter symbol interference, ISI). Assim, o equalizador tem como objectivo reduzir a ISI. Em RCM o equalizador deverá também reduzir o cross-talk entre células (co-channel interference, CCI).

O modelo de sinal mais interferência da eq. (4.17), sem ruído, com um único receptor e amostrado à frequência da trama de entrada, reduz-se a

$$x(k) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{H}_q \mathbf{s}_q(k) \quad (5.1)$$

onde, devido ao facto de termos um único receptor,  $\mathbf{H}_q$  é agora um vector linha  $1 \times N$  e representa o canal de transmissão para o utilizador  $q$ . O objectivo do equalizador da figura 5.1 é de produzir um sinal de saída  $y(k)$  tal que

$$y(k) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(k) \quad (5.2)$$

onde o vector  $\mathbf{x}(k)$  é um vector contendo as amostras do sinal recebido nos  $M$  instantes anteriores a  $k$ ,  $\mathbf{x}(k) = [x(k), \dots, x(k - M + 1)]^t$  e  $\mathbf{w}$  é um vector de dimensão  $M$  contendo os coeficientes de ponderação do filtro linear (equalizador). Podemos então escrever  $\mathbf{x}(k)$  em função de  $\mathbf{H}$  e de  $\mathbf{s}(k)$  como

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{q=1}^Q \tilde{\mathbf{H}}_q \tilde{\mathbf{s}}_q(k) \quad (5.3)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{H}}_q = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_q & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{H}_q \end{pmatrix} \quad (5.4a)$$

e

$$\tilde{\mathbf{s}}_q(k) = [s_q(k), \dots, s_q(k - N - M + 2)]^t \quad (5.4b)$$

de dimensões  $M \times (M + N - 1)$  e  $(N + M - 1) \times 1$  respectivamente. Note-se a sobreposição nos blocos linha da matriz (5.4a). Assim a saída do equalizador pode ser escrita como

$$y(k) = \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{H}}_{1:Q} \tilde{\mathbf{s}}_{1:Q}(k) \quad (5.5)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{H}}_{1:Q} = [\tilde{\mathbf{H}}_1 \dots \tilde{\mathbf{H}}_Q] \quad (5.6a)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_{1:Q} = [\tilde{\mathbf{s}}_1^t(k) \dots \tilde{\mathbf{s}}_Q^t(k)]^t \quad (5.6b)$$

Vamos agora supor que desejamos receber o sinal do receptor  $q$  e por isso minimizar o cross-talk entre utilizadores (CCI) e simultâneamente a ISI. Neste caso os coeficientes  $\mathbf{w}$  do equalizador devem obedecer à seguinte condição

$$\mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{H}}_{1:Q} = [\mathbf{0} \dots \mathbf{0} \mathbf{1} \mathbf{0} \dots \mathbf{0}] \quad (5.7)$$

na qual o vector linha de “1” se encontram entre os índices  $(q-1) \times (M+N-1) + 1$  e  $q \times (M+N-1)$ . Isto significa que as colunas da matriz  $\tilde{\mathbf{H}}_{1:Q}$  deve ser todas linearmente independentes, ou por outras palavras, que  $\tilde{\mathbf{H}}_{1:Q}$  deverá ser de característica completa em relação às suas colunas. Isto baseia-se no facto óbvio de que o vector  $\mathbf{w}$  não pode ser simultâneamente colinear com cada uma das colunas de  $\tilde{\mathbf{H}}_{1:Q}$  e perpendicular a todas as outras se alguma de entre elas for coplanar. Ora isto é impossível visto que  $\tilde{\mathbf{H}}_{1:Q}$  é de dimensão  $M \times Q(M+N-1)$ , i.e., é uma matriz rectangular que tem sempre mais colunas do que linhas o que implica que a característica máxima é igual ao número de linhas  $M$  e por isso teremos sempre pelo menos  $Q \times (M+N-1) - M$  colunas linearmente dependentes. Isto significa que com processamento só temporal à frequência da trama de bits é impossível eliminar simultâneamente a ISI e a CCI. Porém se o sinal recebido for sobre amostrado de um factor  $P$  então  $\tilde{\mathbf{H}}_{1:Q}$  será de dimensão  $MP \times Q(N+M-1)$  e poderá ser não singular se  $M(P-Q) \geq Q(N-1)$  e se os polinómios das linhas de  $\tilde{\mathbf{H}}_{1:Q}$  não tiverem raízes comuns. Podemos então concluir que sem sobre amostragem ( $P=1$ ) é impossível cancelar ISI e CCI simultâneamente ou mesmo só ISI se não houver CCI ( $Q=1$ ). Teóricamente basta que  $P \geq 2$  para que seja possível cancelar ISI e CCI apenas com processamento temporal. Na prática porém, os canais para o sinal e interferência não serão muito diferentes e a condição relativamente às raízes comuns só raramente será verificada o que significa que  $\tilde{\mathbf{H}}_{1:Q}$  será quase sempre mal condicionada e o processamento no domínio temporal permite obter uma rejeição de cross-talk muito baixa.

## 5.2 Processamento no domínio espacial: beamforming

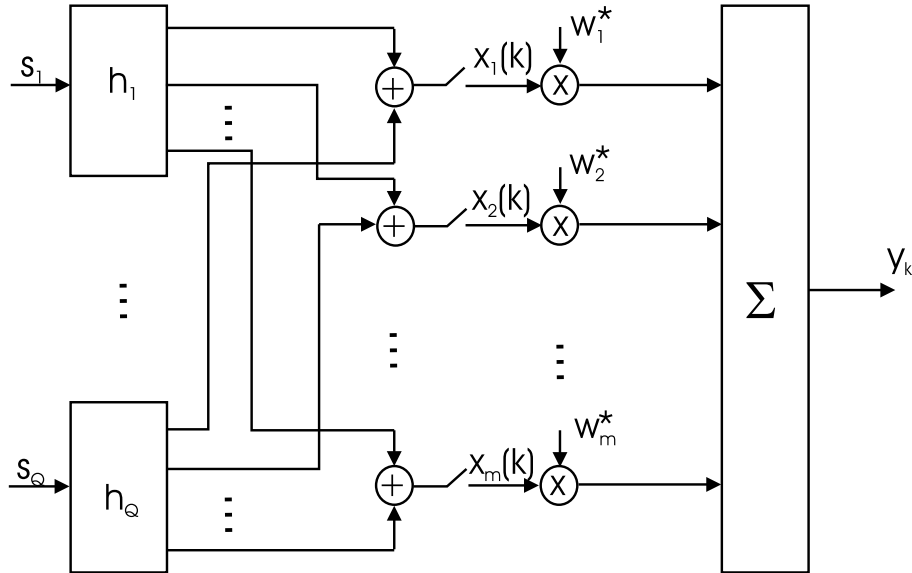


Figura 5.2: processamento do sinal espacial: beamforming

Aqui vamos analisar o caso de processamento só no domínio espacial e faremos apelo a algumas das noções introduzidas no capítulo 2. A equação do sinal observado sem ruído nos  $m$  captosres da antena análoga a (5.1) é

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{h}_q s_q(k) \quad (5.8)$$

segundo representado no lado esquerdo da figura 5.2. Neste caso  $\mathbf{h}_q$  é um vector coluna que representa a diversidade espacial nos diferentes captosres do canal  $\mathbf{H}_q$  na ausência de espalhamento temporal e por isso  $s_q(k)$  é um escalar. Vamos supor que o utente desejado é o  $q$ , sinal  $s_q(k)$ , o sinal de saída do formador de feixes (“beamformer”) escreve-se

$$y(k) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(k) \quad (5.9)$$

onde  $\mathbf{w}$  é um vector de dimensão  $m \times 1$ . Substituindo (5.8) em (5.9) obtemos

$$y(k) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{w}^H \mathbf{h}_q s_q(k) = \mathbf{w}^H \mathbf{H} \mathbf{s}(k) \quad (5.10)$$

onde  $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_Q]$  e  $\mathbf{s}(k) = [s_1(k), \dots, s_Q(k)]^t$ . Em completa analogia com o caso temporal, devemos impor a condição

$$\mathbf{w}^H \mathbf{H} = [0 \dots 0 1 0 \dots 0] \quad (5.11)$$

para receber apenas o utente  $q$  e cancelar completamente toda a ISI e CCI, o que requiere  $m \geq Q$  e que  $\mathbf{H}$  deve ser não singular em relação às suas colunas, i.e., devemos ter mais receptores do que utentes e o canal deverá ser suficientemente não correlado entre os diferentes utilizadores recebido nos diferentes captosres, o que é perfeitamente aceitável na prática devido à diversidade espacial da antena de recepção. Podemos generalizar este resultado ao caso com espalhamento temporal, i.e., o caso no qual cada coluna  $\mathbf{h}_q$  se torna uma matriz  $\mathbf{H}_q$  de dimensão  $m \times N$ . Mais uma vez é possível cancelar a ISI e a CCI sob a condição

$$m \geq NQ \quad (5.12)$$

No caso do modelo completo, no qual o utente  $q$  recebe  $L_q$  réplicas ao longo de outros tantos caminhos múltiplos, a condição para cancelamento completo da ISI e CCI reduz-se a

$$m \geq \sum_{q=1}^Q L_q \quad (5.13)$$

A conclusão óbvia é que o processamento só espacial é teóricamente perfeito para cancelar seja a ISI como a CCI. Dizemos teóricamente porque, mais uma vez na prática, condições como (5.12) e/ou (5.13) em casos de largo número de caminhos e ou densamente populado por utentes exige um número impraticável de captosres na antena ( $m$  elevado). Para além disso, se o espalhamento temporal é fraco ou se os diferentes utentes se encontram em direções de chegada à antena próximas, as colunas de  $\mathbf{H}_q$  tornam-se linearmente dependentes o que destrói a não singularidade da matriz e

por isso a possibilidade de verificar (5.11). No entanto, pode-se notar que, mesmo com estes problemas, o processamento espacial pode ser relativamente eficaz no cancelamento do CCI enquanto o seu desempenho no cancelamento da ISI depende do espalhamento temporal do sinal. Estudos comparativos do desempenho relativo de processamento só espacial ou só temporal mostram que o processamento conjunto espacio-temporal consegue uma melhor performance do que qualquer um deles isoladamente.

## 6. Processamento no domínio espácio-temporal

Devido à sua importância e extensão decidimos fazer um capítulo separado para o caso do processamento espácio-temporal apesar de continuarmos a exemplificar o caso da transmissão móvel-base que, segundo as nossas hipóteses de trabalho, é a única configuração que permite ter processamento espacial e temporal na recepção do sinal na base. Até agora a nossa abordagem do problema tem sido baseada numa condição de tipo zero-um na qual os sinais ou os utentes desejados tem o coeficiente um e os indesejados tem o coeficiente zero. Trata-se, para além disso, de um modelo desprovido de ruído cujo objectivo foi apenas o de caracterizar o desempenho relativo dos casos de processamento só no tempo e só no espaço. No processamento espácio-temporal vamos considerar um modelo mais realístico, com ruído, em que a condição não poderá ser do tipo zero-um mas sim baseada na maximização de um determinado sinal ou utente tentando minimizar a interferência de outros utentes (CCI) e/ou interferência intersimbólica (ISI). Poderemos considerar numa fase inicial que o CCI e a ISI se comportam como ruído, e por isso a supressão de CCI e/ou ISI trata-se simplesmente como se fosse uma minimização de ruído.

### 6.1 Caso geral ou do utente único

Tratamos aqui do caso do utente único através do qual apresentaremos os métodos gerais que depois adaptaremos aos casos multi-utente. O problema coloca-se da seguinte forma: seja o modelo da eq. (4.10) com as definições de (4.11) e (4.12),

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{H}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (6.1)$$

Neste modelo a matriz  $\mathbf{H}$  é suposta conhecida, o ruído é suposto ser branco no espaço e no tempo, de média nula, idênticamente distribuído e de variância  $\sigma^2$ , i.e.,

$$E[\mathbf{n}(k)] = \mathbf{0} \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{n} : F(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (6.2b)$$

$$E[n_i(k)n_i^*(j)] = \delta_{kj}. \quad (6.2c)$$

Geralmente supõe-se também que  $\mathbf{s}(k)$  e o ruído são não correlados entre si. O horizonte de dados é também considerado como sendo formado por  $M$  observações  $\mathbf{x}(k); k = 1, \dots, M$ , sendo conveniente em muitos casos considerar a representação compacta da eq. (4.13). A partir deste modelo vamos expor dois métodos de estimação que conduzem a dois resultados diferentes e sobretudo a duas implementações diferentes. Tentaremos dar em seguida algumas vantagens e desvantagens da aplicação de um e de outro.

#### 6.1.1 Máximo de verossimilhança (MV)

O critério do máximo de verossimilhança é possivelmente dos mais utilizados em estimação (para a definição e mais detalhes ver p.ex. Scharf[4]). Começaremos por introduzir uma hipótese de

trabalho suplementar (geralmente verificada na prática) que é a de a lei de distribuição do ruído ser Gaussiana. Neste caso o problema pode ser enunciado da seguinte forma: determinar um estimador  $\hat{\mathbf{s}}$  de  $\mathbf{s}$  tal que

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}} f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \quad (6.3)$$

onde  $f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$  é a densidade de probabilidade da observação  $\mathbf{x}$  condicionada no parâmetro  $\mathbf{s}$  desconhecido. A função  $l(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \ln f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$  é chamada função de verosimilhança (likelihood function) e o seu logaritmo

$$L(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \ln f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \quad (6.4)$$

é a *log-likelihood function*. Assim, se (6.4) for continuamente diferenciável,  $\hat{\mathbf{s}}$  é encontrado como sendo a raiz da equação

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} L(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = 0 \quad (6.5)$$

Assim, e fazendo apelo a (6.1) e (6.2) com a hipótese de densidade Gaussiana, podemos escrever (supondo que  $\mathbf{x}$  é complexo)

$$f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m \sigma^m} \exp -[(\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s})^H \sigma^{-2} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s})] \quad (6.6)$$

e de onde a função “log-likelihood”

$$L(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = -m \ln(2\pi\sigma) - \sigma^{-2} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s})^H (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}) \quad (6.7)$$

e visto que o primeiro termo não depende de  $\mathbf{s}$ , maximizar (6.7) torna-se equivalente a minimizar o segundo termo e por isso a solução do máximo de verosimilhança é dado por

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 \quad (6.8)$$

É sabido que a solução de (6.8) coincide neste caso com a solução dos mínimos erros quadráticos (MEQ) simplesmente definida como: encontrar  $\mathbf{s}$  tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 \quad (6.9)$$

seja mínimo. Em ambos os casos é suposto que a matriz  $\mathbf{H}$  seja conhecida, o que dificulta o problema da determinação da solução como veremos mais adiante na discussão de algoritmos com e sem tramas de treino. Em particular a implementação das soluções em presença de espalhamento temporal com CCI é bastante complexa e os resultados não muito encorajadores. Devemos ainda referir que a busca da solução da eq. (6.8) pode ser efectuada através do conhecido algoritmo de Viterbi (ver p.e. Proakis [5]).

### 6.1.2 Mínimos erros médios quadrados (MEMQ)

O objectivo aqui é de determinar um vector (ou matriz) de coeficientes  $\mathbf{w}$  que minimize o erro entre a saída obtida e o sinal desejado. Tendo em conta o processamento espacio-temporal torna-se necessário estender a notação utilizada em (5.2) e/ou (5.9) para incluir o espaço e o tempo

simultâneamente. Assim, definimos os vectores e matrizes aumentados  $\vec{\mathbf{X}}(k)$  e  $\vec{\mathbf{W}}(k)$  de dimensões  $mM \times 1$  contendo as amostras do sinal à saída dos  $m$  captosres para todo o intervalo de observação  $i = 1, \dots, M$  e o respectivo vector de ponderação respectivamente. Assim podemos escrever

$$y(k) = \vec{\mathbf{W}}(k)^H \vec{\mathbf{X}}(k) = \text{tr}(\mathbf{W}(k)\mathbf{X}(k)) \quad (6.10)$$

onde  $\mathbf{W}(k)$  e  $\mathbf{X}(k)$  são matrizes de dimensão  $m \times M$  e  $\text{tr}$  é o operador “traço”. O equalizador espacio-temporal no sentido dos mínimos erros quadrados médios escolhe o vector de coeficientes ponderadores  $\vec{\mathbf{W}}$  que mimimiza

$$\hat{\vec{\mathbf{W}}}(k) = \arg \min_{\vec{\mathbf{W}}} E \|\vec{\mathbf{W}}^H \vec{\mathbf{X}}(k) - s(k - \xi)\|^2 \quad (6.11)$$

onde  $s(k)$  é o sinal esperado atrazado de uma quantidade  $\xi$  que tenta representar o atrazo médio da sequênciã enviada durante a sua propagação no canal de transmissão e  $E$  é operador esperança matemática. A eq. (6.11) representa um problema de mínimos quadrados clássico, cuja solução se obtém através do teorema da projecção ortogonal. Com efeito a quantidade a minimizar em (6.11) não é mais do que a distância média entre  $s(k)$  e  $\vec{\mathbf{W}}^H \vec{\mathbf{X}}(k)$ . Visto que desconhecemos o vector  $\vec{\mathbf{W}}$ , a distância que podemos medir é aquela entre o ponto  $s(k)$  e o vector  $\vec{\mathbf{X}}(k)$  que, segundo um celebrado teorema, a distância mínima entre um ponto e uma recta é a perpendicular à dita recta. Portanto, no nosso caso, o vector  $\vec{\mathbf{W}}$  que procuramos é tal que, em média, a diferença  $s(k) - \vec{\mathbf{W}}^H \vec{\mathbf{X}}(k)$  multiplicada por  $\vec{\mathbf{X}}(k)$  deverá ser igual a zero, i.e.,

$$E\{\vec{\mathbf{X}}(k)[\vec{\mathbf{X}}^H(k)\vec{\mathbf{W}} - s^*(k - \xi)]\} = \mathbf{0} \quad (6.12)$$

e onde  $*$ , numa preocupação de generalidade, representa complexo conjugado. Assim, a partir de (6.12) podemos deduzir

$$\vec{\mathbf{W}} = [E\{\vec{\mathbf{X}}(k)\vec{\mathbf{X}}^H(k)\}]^{-1} E[\vec{\mathbf{X}}(k)s^*(k - \xi)] \quad (6.13)$$

que não é mais do que a solução clássica dos mínimos quadrados. Em (6.12) podemos definir a matriz de covariância  $\mathbf{R}_{XX} = E[\vec{\mathbf{X}}(k)\vec{\mathbf{X}}^H(k)]$  de dimensão  $mM \times mM$  e onde aplicando a propriedade de que o sinal e o ruído são independentes, que a trama de bits é branca e que  $M > N$ , admitidas por hipótese, leva a que

$$E[\vec{\mathbf{X}}(k)s^*(k - \xi)] = [0 \dots 0 \vec{\mathbf{H}}^T 0 \dots 0]^T = \vec{\mathbf{H}} \quad (6.14)$$

Nesta última equação  $\vec{\mathbf{H}}$  é, segundo a notação que temos vindo a adoptar, um vector formado pelas colunas da matriz  $\mathbf{H}$  e o número de zeros antes e depois de  $\vec{\mathbf{H}}$  depende da escolha do atrazo  $\xi$ . Note-se ainda que o número de zeros depende dos valores de  $N$  e de  $M$ , i.e., visto que a matriz  $\mathbf{H}$  é de dimensão  $m \times N$ ,  $\vec{\mathbf{H}}$  será de dimensão  $mN \times 1$  e portanto só existirão zeros se  $M > N$ , o que implica que se  $M = N$  então  $\vec{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ . Finalmente podemos escrever o vector de ponderação dos MEMQ,

$$\vec{\mathbf{W}} = \mathbf{R}_{XX}^{-1} \vec{\mathbf{H}} \quad (6.15)$$

As propriedades deste algoritmo podem ser analisadas a partir de simulações e demonstram que combina as propriedades do processamento só no domínio espacial e só no domínio temporal, reduzindo simultaneamente ISI e CCI contra o ruído.

### 6.1.3 MV versus MEMQ

O desempenho relativo destes dois métodos não pode ser analisado de forma correcta teóricamente, pois depende da preponderância de ISI e/ou de CCI assim como da natureza do canal e do grau de conhecimento deste (matriz  $\mathbf{H}$ ). Assim, se o canal for perfeitamente conhecido e sómente em presença de ISI, MV tem um melhor desempenho que MEMQ. Porém no caso de cross-talk entre células torna-se difícil (mas necessário) ter uma boa estimativa da parte de interferência para implementar o estimador de MV, o que é raramente possível na prática. Para além disso, do ponto de vista algorítmico MV é mais complexo do que MEMQ. Dá a impressão que na presença de apenas ISI, MV é preferível e em presença de CCI, MEMQ tem por sua vez melhor desempenho, apesar de hoje em dia ser necessário obter mais estudos comparativos para fazer uma escolha mais acertada entre estes dois métodos.

## 6.2 Sistema com tramas de treino

Na prática o canal de transmissão não é conhecido à priori o que impede a utilização prática de qualquer um dos algoritmos expostos nos dois primeiros pontos deste capítulo. A estimação do meio de transmissão, ou mais precisamente do seu modelo, a incluir na matriz  $\mathbf{H}$  faz-se na prática através da emissão de tramas conhecidas - chamadas tramas de treino - e que depois de descodificadas no receptor permitem por inversão a estimação do canal. Muito simplesmente se  $\mathbf{T}$  for a trama de treino colocada sob forma matricial  $N \times M$ , o sinal recebido numa antena espacial na base e sob forma de blocos semelhante a (4.13) é

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{H}\mathbf{T} + \mathbf{N}(k) \quad (6.16)$$

de onde podemos determinar  $\mathbf{H}$  através de uma método de MQ

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{X}\mathbf{T}^H[\mathbf{T}\mathbf{T}^H]^{-1} \quad (6.17)$$

onde se supõe que  $\mathbf{T}\mathbf{T}^H$  é invertível.

No sistema GSM utilizado em Portugal, tramas de treino são automaticamente inseridas em cada frame de dados de modo a calibrar o sistema continuamente. Este procedimento é robusto e funciona na prática. Porém uma emissão contínua de tramas de treino, de forma a permitir uma adaptação constante do canal - sobretudo para móveis em movimento - resulta numa perda de eficácia do canal de transmissão, ou uma perda de banda como é geralmente qualificada.

Existe por isso necessidade de reduzir ao máximo a percentagem de tramas de treino mantendo porém uma qualidade de recepção aceitável e assim temos um problema de compromisso qualidade



- eficácia. Em GSM, 20% dos bits enviados são utilizados para treino o que representa uma enorme perda de recursos.

### 6.3 Sistema sem tramas de treino

Neste tipo de sistemas não são necessárias tramas de treino, e por isso evitam-se as desvantagens de perda de eficácia apontadas acima. Em vez disso, estes métodos exploram as características espaciais da(s) antena(s) receptora(s) e/ou as características temporais do sinal emitido. Assim, são introduzidas na processamento outras hipóteses de trabalho que tornam os algoritmos mais delicados e mais sensíveis às hipóteses assumidas.

#### 6.3.1 Utilização da estrutura espacial

Na capítulo 2 falámos de formador de feixes (beamformer) que não era mais do que a combinação coerente das saídas dos captores de uma antena formando um sinal direccionado no espaço. Voltando por um instante à eq. (2.7) podemos escrever que

$$b(t) = \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(\theta) \mathbf{n}(t) \quad (6.18)$$

onde  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{n}(t)$  são vectores de dimensão  $L$  com o sinal útil e o ruído recebido ao longo dos  $L$  captores respectivamente. O vector  $\mathbf{a}(\theta)$  representa nesta notação um vector - também de dimensão  $L$  - contendo os atrasos necessários para formar o feixe na direcção  $\theta$ . Este vector normalmente denominado “steering vector” é no caso da antena linear

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, \exp(\frac{-j2\pi d \sin \theta}{\lambda}), \dots, \exp(\frac{-j\pi(L-1)d \sin \theta}{\lambda})] \quad (6.19)$$

Para simplificar as ideias, se estivermos a falar do plano, e  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , então  $\mathbf{a}(\theta)$  vai evoluir para cada valor de  $\theta$  formando um continuum a que chamaremos  $\Psi$ , assim

$$\Psi = \{\mathbf{a}(\theta) | \theta \in [0, 2\pi]\} \quad (6.20)$$

O espaço  $\Psi$  contém os efeitos relativos à geometria da antena (posição relativa dos captores), características espaciais de cada elemento da antena, relacionamento entre captores, etc...O espaço  $\Psi$  também depende da frequência, e de outros factores tecnológicos como por exemplo a conversão A/D, ganhos e fases dos receptores e dos pré-amplificadores. Ainda a respeito da formulação utilizada no capítulo 2, podemos ver que o sinal observado no captor pode ser escrito como uma função do mesmo vector de atrasos, como sinal oposto e “orientado” para a direcção de propagação da onda, i.e.  $\theta_0$ . Assim, podemos escrever o vector com os sinais recebidos nos  $L$  captores

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(\theta_0) s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (6.21)$$

para o caso de uma onda plana monocromática vinda da direcção  $\theta_0$ , que se generaliza facilmente para o caso de  $Q$  ondas monocromáticas vindas de outras tantas direcções a cada uma das quais será associado um vector direcção (steering vector)  $\mathbf{a}(\theta_q)$ .

Voltando à nossa transmissão móvel-base no caso de uma antena na base com  $m$  capttores e  $Q$  utentes podemos escrever da mesma forma o modelo da equação (4.4) sem espalhamento temporal como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (6.22)$$

onde

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_Q)] \quad (6.23a)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_Q(t)]^t \quad (6.23b)$$

e com as seguintes definições

$$s_q(t) = \alpha_q(t)u_q(t - \tau_q) \quad (6.24)$$

e

$$u_q(t) = \sum_k s_q(k)g(t - kT) \quad (6.25)$$

Devemos aqui distinguir a notação  $s(k)$  de  $s(t)$  como sendo a trama de bits discreta enviada e o sinal útil recebido à entrada dos capttores respectivamente. Assumindo que obtemos  $M$  amostras temporais dos  $m$  sensores podemos escrever (6.22) sob a forma de sistema de blocos

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (6.26)$$

De notar que nesta forma, a informação relativa às direcções de propagação de cada utente encontra-se reunida na matriz  $\mathbf{A}$  enquanto a restante informação se encontra incluída em  $\mathbf{S}$ . Os métodos que exploram a estrutura espacial da antena permitem determinar as  $Q$  direcções de propagação contidas em  $\mathbf{A}$  utilizando a informação *a priori* de que as suas colunas estão forçosamente contidas no continuum  $\Psi$ . Os métodos empregues são da classe de métodos de sub-espacos dos quais os mais conhecidos são os algoritmos MUSIC [5] e ESPRIT [6], largamente divulgados na literatura e dos quais existem inúmeras variantes. A consideração fundamental e comum a este tipo de algoritmos é de notar que no modelo (6.22) o vector  $\mathbf{A}\mathbf{s}(t)$  é uma combinação linear de  $Q$  colunas e por isso evolui, no máximo, num sub-espaco de dimensão  $Q$ , se todas as colunas de  $\mathbf{A}$  forem linearmente independentes - este é chamado o *sub-espaco do sinal*. Esta constatação, decorrente da definição de sub-espaco em álgebra linear básica, tem implicações importantíssimas na estimação de vários parâmetros do modelo linear (6.26). Antes do mais devemos constatar que a identificação dos parâmetros relativos aos  $Q$  utentes só é possível quando  $m > Q$ , i.e., quando a dimensão do espaco de observação for superior à do sub-espaco que pretendemos identificar. Na prática isto significa que deveremos ter mais receptores na antena do que utentes, o que limita seriamente os métodos deste tipo.

Visto que  $\mathbf{x}(t)$  é de dimensão  $m$ , suposto  $> Q$ , temos que existem pelo menos  $m - Q$  vectores que podem ser ordenados numa base ortogonal ao sub-espaco do sinal de forma a permitir a decomposição do sinal observado conforme indicado na figura 6.1, onde  $\mathbf{a}_0$  representa o vector a decompor,  $\mathbf{P}_a\mathbf{a}_0$  é a sua projecção no sub-espaco do sinal e, obviamente,  $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_a)\mathbf{a}_0$  é o seu complemento ortogonal a que chamamos projecção no sub-espaco do ruído.

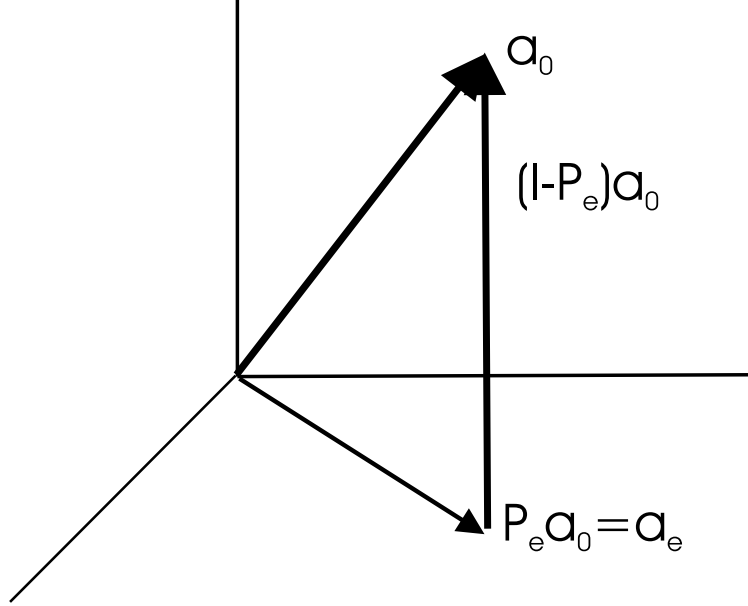


Figura 6.1: decomposição ortogonal do sinal observado.

Por antítese, se o sub-espaço gerado pelas  $Q$  colunas de  $\mathbf{A}$  se chama sub-espaço do sinal, o sub-espaço gerado pelas  $m - Q$  vectores ortogonais a esse sub-espaço é chamado sub-espaço do ruído. É esta decomposição de todo o espaço em dois sub-espaços, do sinal e do ruído, que constitui a base dos métodos de sub-espaços. A questão que se coloca agora é: como estimar o sub-espaço do sinal? Schmidt [5] provou que o estimador formado pelos  $Q$  vectores próprios associados com os  $Q$  maiores valores singulares da matriz de dados  $\mathbf{X}$  de (6.26) corresponde simultâneamente ao estimador de máxima verosimilhança, ao estimador dos mínimos quadrados e ao estimador de máxima entropia (Burg[7]) do sub-espaço do sinal pretendido. Na prática, e dado que as observações têm ruído, o espaço do sinal estimado a partir da decomposição em valores singulares de  $\mathbf{X}$  não coincide exactamente com o sub-espaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{A}$ , assim seremos levados a maximizar a projecção de  $\mathbf{A}$  na estimada do sub-espaço do sinal que se escreve

$$\hat{\theta}_q^s = \arg \max_{\theta \in \Theta} \|\mathbf{E}_Q (\mathbf{E}_Q^H \mathbf{E}_Q)^{-1} \mathbf{E}_Q^H \mathbf{a}(\theta)\|^2 \quad q = 1, \dots, Q \quad (6.27)$$

onde  $\mathbf{E}_Q$  é a matriz de dimensão  $m \times Q$  formada pelos  $Q$  vectores próprios associados com os  $Q$  maiores valores singulares. Assim, sabemos que  $\mathbf{E}_Q^H \mathbf{E}_Q = \mathbf{I}$  e então (6.27) reduz-se a

$$\hat{\theta}_q^s = \arg \max_{\theta \in \Theta} [\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{E}_Q \mathbf{E}_Q^H \mathbf{a}(\theta)] \quad q = 1, \dots, Q \quad (6.28)$$

Da mesma forma que (6.28) estabelece um estimador dos ângulos de chegada das ondas associadas com os  $Q$  utentes como a maximização da projecção da estrutura espacial  $\Psi$  no sub-espaço estimado, podemos de forma análoga, minimizar a projecção de  $\Psi$  no sub-espaço do ruído, pois que se esta for mínima (que dizer zero) então  $\Psi$  estará o mais coincidente possível (quer dizer exactamente) com o sub-espaço ortogonal complementar, i.e., o sub-espaço do sinal. Por isso podemos também definir o estimador

$$\hat{\theta}_q^n = \arg \max_{\theta \in \Theta} \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{E}_{m-Q} \mathbf{E}_{m-Q}^H \mathbf{a}(\theta)} \quad q = 1, \dots, Q \quad (6.29)$$

onde agora  $\mathbf{E}_{m-Q}$  é a matriz de dimensão  $m \times (m - Q)$  complementar de  $\mathbf{E}_Q$ , tal que  $\mathbf{E}_{m-Q} \perp \mathbf{E}_Q$ .

A partir do modelo (6.26) existem outros métodos, que não os métodos de sub-espacos, para estimar as direcções de chegada das ondas dos  $Q$  utentes. Em particular os métodos de MV e de MEQM são aplicáveis sem nenhuma modificação em relação ao caso exposto em 6.1.1 dando como vector de ponderação

$$\mathbf{w}_q = \mathbf{R}_{XX}^{-1} \mathbf{a}(\theta_q) \quad (6.30)$$

onde a matriz  $\mathbf{R}_{XX}$  já foi definida como a matriz de covariância dos dados observados,  $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{X}\mathbf{X}^H$ .

Os métodos que acabámos de expôr, e que utilizam unicamente a estrutura espacial da antena, apesar de permitirem estimar as direcções de chegada das ondas dos diferentes utentes e portanto a estrutura do modelo sem recorrerem a tramas de treino, tem no entanto várias desvantagens na prática. Primeiro tem sérias dificuldades em lidar com o espalhamento temporal do sinal. Espalhamento temporal quer dizer que o sinal não chega todo ao mesmo tempo mas sim existem uma série de chegadas atrasadas umas em relação às outras. Como cada chegada percorreu um caminho diferente entre o emissor e os receptores a cada uma delas poderá estar (e estará em geral) associado um ângulo de chegada diferente, o que implica um espalhamento espacial também. Em termos dos métodos MUSIC, MV e MEMQ expostos acima, e que exploram a estrutura espacial da antena, isto significa que cada uma das chegadas múltiplas vai ser vista como uma onda diferente à qual é associada uma direcção. Isto vai criar uma grande confusão, sobretudo tendo em conta que neste caso a condição  $m > Q$  transforma-se em  $m > \sum_q L_q$ , onde  $L_q$  é o número de chegadas para o utente  $q$ . A questão é tanto mais crítica quanto se sabe que na prática o número de captosres em cada antena é limitado geralmente a valores entre 4 e 8 para cada sector, o que é insuficiente para meios com muitos caminhos múltiplos e utentes. Outro inconveniente é que a utilização de (6.28), (6.29) ou (6.30) necessita o conhecimento de  $\mathbf{a}$ , i.e., o continuum  $\Psi$  o que requiere uma calibração exacta da antena receptora na base: distâncias relativas entre os captosres. A precisão desta calibração está estreitamente ligada com o comprimento de onda utilizado que, às frequências de transmissão utilizadas tem um valor extremamente baixo.

### 6.3.2 Utilização da estrutura temporal

Os métodos que utilizam a estrutura temporal do sinal para evitar tramas de treino são hoje em dia muito utilizadas. Por estrutura temporal entende-se as propriedades da função de modulação  $u(t)$ , a formação de pulso e a função de constelação. Uma estrutura típica é a de módulo constante.

Neste tipo de sinais a forma de onda tem um envelope de amplitude constante. O caso mais conhecido é a modulação FM. Outro caso menos conhecido, mas hoje em dia bastante utilizado no standard GSM, é o da modulação GMSK na qual a função de modulação tem a forma

$$u(t) = \exp\{j[\omega t + \phi(t)]\} \quad (6.31)$$

onde  $\phi(t)$  é um termo de fase saída de um sinal MSK, filtrado por um filtro Gaussiano.

Existem ainda outro tipo de estruturas como por exemplo a do alfabeto finito e da distância do caso Gaussiano. A ideia de base na utilização destas estruturas temporais é de utilizar a forma particular

da representação temporal da modulação da trama para estimar o canal  $\mathbf{H}$  sem perder o desempenho de transmissão. Por exemplo no caso do módulo constante é evidente que se o sinal emitido tiver uma amplitude constante, todas as variações de amplitude do sinal recebido são devidas a efeitos introduzidos no canal, como por exemplo slow/fast fading etc... que podem ser desmodulados do sinal recebido. O problema essencial vem do facto que o canal tem dois tipos de efeito: na amplitude e na fase, e só um destes efeitos pode ser recuperado no sinal recebido - o outro serve para enviar a mensagem.

Uma palavra agora para uma outra propriedade temporal do sinal emitido que é a cicloestacionariedade. Um processo aleatório é dito periodicamente estacionário ou *cicloestacionário* se a sua média e a sua função de autocorrelação forem simultaneamente periódicas. Sobre amostragem conduz a um sinal amostrado  $x(k)$  de  $x(t)$  de maior dimensão e portanto a uma matriz  $\mathbf{H}$  com um número de linhas  $\gg$  ao número de colunas e a um certo ponto permite que  $\mathbf{H}$  tenha todas as colunas linearmente independentes e torna-a uma matriz Toeplitz por blocos que é uma propriedade essencial na identificação do canal sem tramas de treino.

Todas estas propriedades fazem pensar a um análogo temporal do continuum espacial definido em (6.20). Da mesma forma que o continuum espacial  $\Psi$  contém a informação espacial da frente de onda em relação à geometria da antena, o *continuum temporal* contém a informação relativa à função de formação de pulso utilizada na modulação do sinal emitido. Podemos escrever a eq. (4.11) fazendo ressaltar a informação temporal da função de modulação

$$[\mathbf{H}]_{i;1:N} = \sum_{l=1}^L a_i(\theta_l) \alpha_l^R \mathbf{g}^t(\tau_l), \quad i = 1, \dots, m \quad (6.32)$$

onde  $\mathbf{g}$  é a função de modulação sob forma de vector de dimensão  $N$ . A partir deste vector, para todos os atrasos  $\tau_l$  possíveis, podemos definir o continuum

$$\Xi = \{\mathbf{g}(\tau) | \tau \in \Upsilon\} \quad (6.33)$$

onde  $\Upsilon$  é o conjunto de todos os atrasos. Enquanto o continuum espacial depende de vários factores entre os quais a estrutura física da antena, ganhos de amplificadores, etc... o continuum temporal depende apenas da forma da função formadora de pulso, o que permite estimá-lo com uma relativamente boa exactidão.

Os métodos mais utilizado em identificação do canal de transmissão sem tramas de treino e explorando a estrutura temporal são aqueles que utilizam sinais de Módulo Constante (MC). Neste caso o sinal transmitido é um sinal com o módulo corrigido o que implica que podemos utilizar na recepção um critério a minimizar do tipo

$$J(\mathbf{W}) = E[|y(k)|^2 - \mathbf{1}]^2 \quad (6.34)$$

onde  $y(k)$  é o sinal de saída do filtro que depende da matriz de ponderação  $\mathbf{W}$  que pretendemos determinar e  $\mathbf{1}$  é um vector de um's. O algoritmo iterativo que resulta da minimização de  $J(\mathbf{W})$  pode ser do tipo gradiente onde na amostra  $k$

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) + \mu \mathbf{X}(k) y^*(k) [|y(k)|^2 - 1] \quad (6.35)$$

Existem muitos outros algoritmos e variantes tanto na utilização de sinais de modulação de módulo constante como aqueles que utilizam a cicloestacionaridade. Este último caso representa hoje em dia um tema de intensa investigação.

## 6.4 Caso multi-utente

No caso multi-utente pretendemos extrair sinais relativos a vários utentes do sinal recebido numa antena multicaptadores colocada na base. Este caso coloca-se quando são reutilizadas frequências dentro da mesma célula ou quando pretendemos extrair o sinal de interferência de células vizinhas para melhor o cancelar. O modelo a considerar é como anteriormente

$$\mathbf{X} = \mathbf{HS} + \mathbf{N} \quad (6.36)$$

onde  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{S}$  tem agora dimensões  $m \times NQ$  e  $NQ \times M$ , respectivamente, de forma a incluir múltiplos receptores e múltiplos utilizadores. A nossa exposição será paralela ao caso do utente único e depois passaremos em revista algumas técnicas de calibração do canal sem trama de treino.

### 6.4.1 Métodos MV e MEMQ multi-utente

Seguimos exactamente o mesmo caminho já traçado para estes métodos no caso do utente único dos capítulos 6.1.1 e 6.1.2. Se os canais de transmissão para cada utente são conhecidos então o problema multi-utente transforma-se numa repetição do caso utente único para cada canal como acontece em MEMQ ou estender o caso do utente único a uma estimação conjunta de todos os utentes em simultâneo no caso MV/MLSE. A estimação separada para cada utente requiere que os outros utentes sejam considerados como interferências e pressupõe que não existe correlação entre eles e o sinal útil. Na prática, o problema essencial é a estimação dos canais de transmissão para os quais deverão ser utilizadas sequências de treino (no caso com tramas de treino) com uma fraca correlação entre cada utente de forma a minimizar acoplamento cruzado entre canais.

Estudos feitos no caso multi-utente demonstraram que a estimação conjunta de sinais provenientes de vários utentes num sistema multi-frequência, em que cada utente tem um único código (idêntico a MV) permite obter resultados superiores ao de uma estimação separada de utentes múltiplos (análogo a MEMQ).

### 6.4.2 Métodos sem trama de treino multi-utente

O interesse volta-se de novo para os métodos que permitem determinar os canais de transmissão sem utilizar tramas de treino já exposto no caso utente único no capítulo 6.3, nomeadamente utilizando a estrutura espacial discutida em 6.3.1. Neste caso procura-se também estimar a matriz  $\mathbf{A}$  contendo a estrutura da antena de recepção e os ângulos de chegada de cada um dos sinais, utilizando métodos de decomposição de sub-espacos (por exemplo). Em seguida utiliza-se, para

cada utente  $q$ , a eq. (6.30) para determinar o vector de ponderação,  $\mathbf{w}_q$ . Existem igualmente métodos que exploram a estrutura temporal do sinal emitido no caso multiutente. Passamos então a descrever brevemente alguns dos métodos mais utilizados.

**Alfabeto Finito (AF):** este método baseia-se no facto de que a codificação da mensagem, e portanto a sua modulação digital, é sempre realizada através de um número finito de símbolos, por outras palavras, o sinal modulado exprime uma relação linear (ou não linear, conforme a modulação) do alfabeto finito. Por exemplo, no caso do sinal utilizado no standard IS-54, que é uma modulação do tipo DQPSK a  $\pi/4$ , onde o sinal modulador se escreve

$$u(t) = \sum_p A_p g(t - pT) + j \sum_p B_p g(t - pT) \quad (6.37)$$

com

$$A_p = \cos(\phi_p), \quad B_p = \sin(\phi_p) \quad (6.38)$$

onde  $\phi_p = \phi_{p-1} + \Delta\Phi_p$  e  $\Delta\Phi_p$  é escolhido num conjunto finito de diferenças de fase  $\{\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$  de acordo com a trama de dados ou mensagem a transmitir  $s(k)$ , este conjunto finito de fases constitui uma estrutura de alfabeto finito.

Assim, assumindo que o canal não tem espalhamento temporal e que a amostragem de símbolos entre os diferentes utentes é perfeitamente síncrona, podemos utilizar o mesmo modelo linear do sinal recebido

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (6.39)$$

onde a estrutura espacial  $\mathbf{A}$  e a matriz de sinais enviados  $\mathbf{S}$  são ambas desconhecidas. O critério de MV aplica-se a partir da minimização de

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{S}} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{S}\|^2 \quad (6.40)$$

Visto que  $\mathbf{S}$  se encontra codificado a partir de um alfabeto finito, podemos resolver o problema posto por (6.40) simultâneamente para  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{A}$ . Na realidade, como o método de máxima verossimilhança (MV) é separável em relação às variáveis, i.e., a estimada conjunta é obtida como o conjunto das estimadas separadas, a minimização de (6.40) pode-se realizar através das projecções alternadas de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{S}$ . Começando por partir com uma estimada inicial de  $\mathbf{A}$ , podemos minimizar (6.40) em relação a  $\mathbf{S}$  com  $\mathbf{A}$  fixo: isto é análogo ao problema de estimação do sinal conhecendo o canal. Em seguida com a estimada de  $\mathbf{S}$  podemos minimizar em relação a  $\mathbf{A}$  com  $\mathbf{S}$  fixo: o que constitui um problema de mínimos quadrados (MQ) clássico. O processo é iterado até atingir um ponto fixo, i.e., a partir dos quais nem  $\mathbf{A}$  nem  $\mathbf{S}$  evoluem e que constitui o mínimo global de (6.40). Existem vários algoritmos para resolver este problema e torná-lo mínimamente abordável na prática. Note-se que a solução proposta aqui para o caso multi-utente, pode ser também utilizada no caso mono-utente se simultâneamente o canal e o sinal recebido forem desconhecidos.

**Alfabeto Finito com Sobre Amostragem (AF-SA):** em presença de espalhamento temporal e/ou dessincronização entre símbolos, o algoritmo AF tem que ter em conta não só a estrutura

especial do canal, patente em  $\mathbf{A}$ , mas sim a estrutura espacio-temporal completa  $\mathbf{H}$  o que implica uma re-escritura de (6.39) como

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (6.41)$$

onde, assumindo uma taxa de sobre-amostragem de  $P$ , as dimensões de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{S}$  são agora  $mP \times M$ ,  $mP \times NQ$  e  $NQ \times M$  respectivamente. Como notado anteriormente  $\mathbf{H}$  é agora uma matriz rectangular com muitas mais linhas que colunas, tem característica completa em relação às suas colunas e tem também uma estrutura Toeplitz. O problema da estimação simultânea de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{S}$  em (6.41) através da minimização de MQ do tipo (6.40) com  $\mathbf{H}$  no lugar de  $\mathbf{A}$  é impossível. A única tentativa publicada que existe é uma aproximação em duas fases: primeiro estima-se o canal  $\mathbf{H}$  utilizando a estrutura característica e de Toeplitz o que nos permite obter o sub-espaço das linhas de  $\mathbf{S}$  que permite a sua estimação numa segunda fase utilizando as propriedades do AF.

**Módulo Constante Multi-Utente (MC-MU):** a técnica do módulo constante (MC) é uma alternativa ao AF para separação de utentes em casos multi-utente, onde mais uma vez se explora a estrutura temporal da modulação.

Mais uma vez devemos separar os casos com e sem espalhamento temporal. No caso sem espalhamento temporal temos uma aproximação unicamente espacial do problema da separação de fontes, onde as soluções são idênticas só espaço, do caso dos algoritmos MC temporal exposto em 6.3.2, eq. (6.34) e seguintes. Neste caso em vez de tentar combater a ISI estimando o sinal do único utente, combate-se a CCI tentando separar os sinais recebidos de cada um dos utentes minimizando a interferência dos outros.

No caso com espalhamento temporal o problema é, como habitualmente, mais complexo. O problema consiste em determinar um equalizador do tipo

$$\mathbf{W} = [W_1, \dots, W_Q] \quad (6.42)$$

de dimensão  $mM \times Q$  e onde  $W - q$  é o vector de ponderação espacio-temporal que permite equalizar o canal relativo ao utente  $q$ . O sinal de saída escreve-se então

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{W}^H X(k) \quad (6.43)$$

O algoritmo proposto consiste na minimização de uma função de custo que utiliza explicitamente a estrutura MC mas que inclui também um termo de inter-correlação entre canais, i.e., a função de custo penaliza os sinais cuja amplitude seja diferente de constante e também a inter-correlação entre eles. Esta função de custo escreve-se

$$\hat{\mathbf{W}} = \arg \min_{\mathbf{W}} J(\mathbf{W}) = E \left[ \sum_{q=1}^Q (|y_q|^2 - \mathbf{1})^2 + c \sum_{l,n=1;l \neq n}^Q \sum_{\xi=\xi_1}^{\xi_2} |r_{ln}(x_i)|^2 \right] \quad (6.44)$$

onde o termo  $r_{ln}(\xi)$  é a função de inter-correlação entre o sinal (utente)  $l$  e  $n$ , i.e.,

$$r_{ln}(\xi) = E[y_l(k)y_n(k - \xi)] \quad (6.45)$$



e onde os inteiros  $\xi_1$  e  $\xi_2$  dependem do espalhamento temporal do canal e basicamente indicam o intervalo temporal no qual a inter-correlação é significativa. A minimização de  $J(\mathbf{W})$  faz-se através de um algoritmo do tipo gradiente semelhante ao exposto em 6.3.2. para o caso MC adaptado á função (6.44).

## 7. Processamento do sinal na transmissão base-móvel

Falemos agora do problema da transmissão do sinal da estação base para o receptor móvel. Continuaremos a considerar que a estação base tem uma antena multicaptor enquanto o móvel tem uma antena monocaptor. Como já foi referido anteriormente, neste caso, o processamento do sinal, e em particular o processamento espacio-temporal, far-se-á na estação base antes da transmissão. Enquanto no caso móvel-base o sinal recebido pode ser utilizado para estimar o canal de transmissão, no caso base-móvel o conhecimento do canal só pode ser realizado através do sinal de retorno (feedback) recebido no móvel. No entanto, como os canais de transmissão são utilizados em modo duplex torna-se possível determinar o canal base-móvel a partir do canal móvel-base.

### 7.1 Modelo do sinal base-móvel

A partir do nosso modelo usual podemos directamente escrever o modelo discreto do sinal recebido num móvel único como

$$x(k) = \mathbf{w}^H \mathbf{H}^F \mathbf{s}(k) + z(k) + n(k) \quad (7.1)$$

onde  $\mathbf{H}^F$  designa a matriz do canal directo base-móvel na qual a  $i$ -enésima linha representa a resposta discreta do  $i$ -enésimo receptor da antena na base a um símbolo emitido através dos  $L$  caminhos múltiplos;  $z(k)$  representa a sinal de interferência recebido no móvel como sendo a soma das mensagens de outras bases em células vizinhas (CCI);  $\mathbf{w}$  é o vector de processamento espacial ou temporal referido em (4.6) e (4.8); finalmente  $n(k)$  representa o ruído de origem electrónica. Além da interferência  $z(k)$ , e visto que o isolamento entre canais não é perfeito, o sinal recebido no utente  $q$  tem também interferência devida aos outros  $Q - 1$  utentes na mesma célula, *i.e.*,

$$x_q(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{H}_q^F \mathbf{s}_q(k) + \sum_{p=1; p \neq q}^Q \mathbf{w}_p \mathbf{H}_p^F \mathbf{s}_p(k) + z_q(k) + n_q(k) \quad (7.2)$$

onde aqui encontramos os termos de interferência intra-célula e inter-células separados no segundo e terceiro termos respectivamente.

### 7.2 Estimação do canal base-móvel

Trata-se aqui de obter uma estimativa do canal  $\mathbf{H}^F$ . Se se tratar de um sistema TDD (Time Domain Duplexing), no qual o tempo de envio e retorno é pequeno comparado com o intervalo de coerência do canal, *i.e.*, o intervalo de tempo durante o qual o canal é sensivelmente constante - baixo espalhamento Doppler - então poder-se-á dizer que o canal directo e de retorno são idênticos e usar a estimativa obtida em retorno no processamento directo,  $\mathbf{H}^F = \mathbf{H}^R$ .

Se o sistema for de tipo FDD (Frequency Domain Duplexing), podemos ter vários casos:

a) o canal de transmissão é do tipo só com espalhamento angular e sem atraso temporal pelo que a matriz  $\mathbf{H}$  se reduz a um vector  $\mathbf{a}(\theta)$  e neste caso os canais directos e de retorno são idênticos com possivelmente um factor multiplicativo de diferença, *i.e.*,  $\mathbf{H}^F = c\mathbf{H}^R = c\mathbf{a}(\theta)$ ;

b) sem espalhamento angular mas com espalhamento temporal, temos que  $\mathbf{H}^R = \mathbf{a}b^R$  onde  $b$  contém as características temporais do canal que se poderão, dentro de uma boa aproximação, considerar constantes ao longo da antena, mas que, no caso FDD, serão não correladas entre o canal directo e de retorno, enquanto a parte espacial do canal, designada pelo vector  $\mathbf{a}$  é a mesma para o canal directo e de retorno o que nos permite escrever,  $\mathbf{H}^F = \mathbf{a}b^F$ , o que requiere por isso a estimação da característica  $b^F$ ;

c) o caso em que não existe espalhamento temporal nem no canal directo nem no canal de retorno, mas existe espalhamento espacial, é necessário estimar a estrutura angular para os dois canais;

d) finalmente com espalhamento angular e temporal, implica que os dois canais são inteiramente diferentes, tanto temporal como espacialmente. Pode no entanto deduzir-se que os sub-espacos geradores das colunas de  $\mathbf{H}^F$  = ao espaco gerador das colunas de  $\mathbf{H}^R$  se  $m > N$  e o mesmo em relação às linhas no caso em que  $m < N$ . Esta propriedade pode ser efectivamente utilizada na estimação do canal directo a partir as propriedades do canal de retorno.

### 7.3 Processamento espacio-temporal na transmissão base-móvel

Uma vez que existe uma estimativa do canal de transmissão é possível realizar processamento espacio-temporal na ligação base-móvel.

#### 7.3.1 Caso do utente único

O problema é o de determinar o vector  $\mathbf{w}$  na eq. (7.1) de forma a minimizar a ISI, a CCI e de forma a maximizar o nível do sinal no sentido dos MEMQ. Enquanto a ISI e o nível do sinal dependem directamente da base responsável pela transmissão da mensagem na célula à qual o móvel pertence, a CCI depende unicamente das bases das células contíguas e não da base encarregue da transmissão. Neste caso a diminuição da CCI requiere cooperação entre bases contíguas. Assim, podemos estabelecer como critério determinar  $\mathbf{w}$  de forma a

$$\min_{\mathbf{w}} \{E \|\mathbf{w}^H \mathbf{H}^F \mathbf{s}(k) - s(k - \xi)\|^2 + C \sum_{q=1}^{Q-1} \mathbf{w}^H \mathbf{H}_q^F \mathbf{H}_q^{FH} \mathbf{w}\} \quad (7.3)$$

onde  $C$  é um parâmetro destinado a balancear a redução de ISI e de CCI, ou seja, pondera o primeiro termo destinada à minimização de ISI e o segundo que minimiza a CCI. Mais uma vez  $\xi$  é um parâmetro que representa o atraso médio do sinal esperado no receptor. Note-se que a solução de (7.3) requiere o conhecimento *a priori* de  $\mathbf{H}^F$  e dos  $\mathbf{H}_q^F$ .

#### 7.3.2 Caso multi-utente

O problema aqui é semelhante ao caso anterior no que respeita à redução de ISI e CCI, mas necessita a estimação de um vector ponderador  $\mathbf{w}_q$  para cada receptor  $q$ , sempre utilizando o critério de

MEMQ. Mais uma vez é necessário uma cooperação entre estações de base em células contíguas de forma a reduzir o CCI para o utente na própria célula reduzindo da mesma forma o CCI para os utentes das células contíguas. A relação de custo a minimizar para o utente  $q$  escreve-se então

$$\hat{\mathbf{w}}_q = \underset{\mathbf{w}_q}{\operatorname{argmin}} \{ E \| \mathbf{w}_q^H \mathbf{H}_q^F \mathbf{s}_q(k) - s_q(k - \xi) \|^2 + C \sum_{p=1; p \neq q}^Q \mathbf{w}_p^H \mathbf{H}_q^F \mathbf{H}_q^{FH} \mathbf{w}_p \} \quad (7.4)$$

Este problema de minimização é relativamente complexo e necessita métodos não lineares fora do âmbito desta apresentação. Claro que neste caso foi suposto que era realizado unicamente processamento espacial. Se for desejado processamento espacio temporal, é necessário redefinir o vector de ponderação  $\mathbf{w}$  de acordo com o exposto em (4.6) - (4.8).

## 8. Estimação dos parâmetros multi-caminhos

O canal de transmissão encontra-se caracterizado pela sua estrutura multicaminhos que essencialmente se encontra definida pelo conjunto de parâmetros composto pelos atrasos temporais e ângulos de chegada. O conhecimento desta estrutura dá-nos a possibilidade de adaptar o processamento espacio-temporal ao canal em questão, por exemplo, permite a separação de fontes através de *beam-forming* na ligação móvel-base e/ou na ligação base-móvel. Pode ajudar também no mapeamento do canal directo em relação ao canal de retorno e no seguimento da evolução temporal do canal de transmissão em geral. Os métodos que têm em conta apenas a estrutura espacial, p.ex., métodos baseados na separação em sub-espacos já expostos em 6.3.1 encontram-se praticamente limitados devido à condição restritiva  $m > Q$  ou no caso geral multicaminhos-multiutentes  $m > \sum L_q$ . A utilização de uma aproximação espacio-temporal permite aliviar esta restrição tirando partido da estrutura temporal do sinal emitido.

### 8.1 Continuum espacio-temporal

Já anteriormente tivemos a ocasião de definir as noções de continuum espacial e continuum temporal. O primeiro estava ligado à estrutura física da antena de recepção e de alguma forma determina o “espaço” que pode ser coberto pelo vector receptor de antena  $\mathbf{a}(\theta)$  para todos os  $\theta \in \Theta$  possíveis. De forma análoga, o continuum temporal define o “espaço” attingível pelo conjunto de funções de formação de pulso  $\mathbf{g}(\tau)$  para todos os atrasos  $\tau \in \Upsilon$  possíveis. Vamos agora definir o continuum espacio-temporal no seu conjunto. Primeiro comecemos por recordar a eq. (4.11) que se pode escrever para a matriz  $\mathbf{H}$  como

$$\mathbf{H} = \sum_{l=1}^L \mathbf{a}(\theta_l) \alpha_l^R \mathbf{g}^T(\tau_l) \quad (8.1)$$

onde obviamente o vector  $\mathbf{a}(\theta_l)$  contém a informação espacial da antena relativa à direcção  $\theta_l$  e o vector  $\mathbf{g}(\tau_l)$  contém a informação temporal relativa à função formadora de pulso para o atraso  $\tau_l$ , do sinal recebido ao longo do caminho múltiplo  $l$ . Definimos agora o vector  $\mathbf{u}$  de dimensão  $mN \times 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\theta_l, \tau_l) &= \text{vec}(\mathbf{g}(\tau_l) \mathbf{a}(\theta_l)) \\ &= \mathbf{g}(\tau_l) \otimes \mathbf{a}(\theta_l) \end{aligned} \quad (8.2)$$

onde  $\otimes$  designa o produto de Kronecker<sup>†</sup>, definido no caso geral por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$$

onde  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são duas matrizes  $n \times m$  com  $\mathbf{C}$  de dimensões  $mn \times mn$  e tal que o elemento

$$C_{\alpha\beta} = A_{ij} B_{kl}$$

com  $\alpha = n(i-1) + k$  e  $\beta = n(j-1) + l$ .

<sup>†</sup> obtida graças à investigação de um aluno dedicado !

Podemos então definir  $\mathbf{u}(\theta, \tau)$  como a resposta espácio-temporal do canal/antena a uma frente de onda vinda da direcção  $\theta$  e atraso  $\tau$ , e assim re-escrever a matriz  $\mathbf{H}$  sob forma de vector ao longo das suas colunas como

$$\vec{\mathbf{H}} = \sum_{l=1}^L \alpha_l^R \mathbf{u}(\theta_l, \tau_l) \quad (8.3)$$

e finalmente

$$\vec{\mathbf{H}} = \mathbf{U}\alpha(k) \quad (8.4)$$

onde as colunas da matriz  $\mathbf{U}$  são óbviamente formadas pelos vectores espácio temporais para cada caminho de  $l = 1, \dots, L$ , *i.e.*,

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}(\theta_1, \tau_1), \dots, \mathbf{u}(\theta_L, \tau_L)] \quad (8.5)$$

e o vector  $\alpha$  é dado por

$$\alpha^T = [\alpha_1^R, \dots, \alpha_L^R] \quad (8.6)$$

e onde a dependência temporal de  $\alpha$  foi introduzida em (8.4) de forma a indicar que são considerados intervalos de tempo relativamente longos nos quais os atrasos e ângulos são constantes mas a flutuação do canal não pode ser considerada constante. Com estas definições podemos escrever a observação do canal como

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{U}\alpha(k) + \mathbf{n}(k) \quad (8.7)$$

onde todos os termos foram definidos e  $\mathbf{n}(k)$  é o ruído de observação. Considerando um horizonte de observação  $\{k = 1, \dots, M\}$ , podemos escrever o modelo matricial

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{B} + \mathbf{N} \quad (8.8)$$

onde agora  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{N}$  são de dimensões  $mN \times M$ ,  $L \times M$  e  $mN \times M$  respectivamente.

## 8.2 Estimador do máximo de verosímilhança (MV)

O problema a resolver coloca-se da seguinte forma: conhecendo o canal  $\mathbf{H}$  queremos determinar os  $2L$  parâmetros  $\{(\theta_l, \tau_l), l = 1, \dots, L\}$  eliminando os parâmetros  $\alpha_l^R$  que são aqui considerados como perturbadores. Um dos métodos possíveis consiste em considerar todos os parâmetros desconhecidos como determinísticos e aplicar o método de MV onde, claro, é necessário admitir que o ruído  $\mathbf{N}$  segue uma distribuição Gaussiana. Como já foi dito anteriormente este problema de estimação é equivalente à minimização

$$\min_{\theta, \tau, \mathbf{B}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{U}(\theta, \tau)\mathbf{B}\|^2 \quad (8.9)$$

Trata-se aqui de um problema separável no qual a optimização pode ser realizada separadamente: primeiro minimiza-se em relação a  $\mathbf{B}$ , tratando  $\mathbf{U}$  como constante de onde se obtém:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{U}^H \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{Y} \quad (8.10)$$

Em segundo, substitui-se (8.10) de novo em (8.9) resolvendo para  $\theta$  e  $\tau$  obtendo-se

$$(\hat{\theta}, \hat{\tau}) = \operatorname{argmax} \{tr(\mathbf{P}_U \hat{\mathbf{R}}_y)\} \quad (8.11)$$

onde  $\mathbf{P}_U$  é a matriz de projecção

$$\mathbf{P}_U = \mathbf{U}(\mathbf{U}^H \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H \quad (8.12)$$

e  $\hat{\mathbf{R}}_y$  é a estimativa da matriz de covariância das observações. A resolução de (8.11) pode ser efectuada com um método de optimização do tipo Newton-Raphson ou alternativamente através de uma busca a duas dimensões baseada num método de sub-espacos.

## 9. Processamento espaco-temporal em CDMA

### 9.1 Introdução

Os sistemas utilizando CDMA (Code Division Multiple Access) encontram-se neste momento em fase de grande desenvolvimento e implementação prática. O ganho obtido através de processamento espaco-temporal em outros sistemas pode também melhorar o desempenho em CDMA. A grande diferença de CDMA em relação a TDMA (Time Division Multiple Access) e/ou FDMA (Frequency Division Multiple Access) é que contrariamente a cada um destes sistemas, em CDMA, todos os utentes ocupam o mesmo canal temporal e frequencial. A separação dos utentes faz-se através do seu código de espalhamento, *i.e.*, cada utente tem um código único. O código opera a uma cadência  $P$  vezes ( $100 < P < 1000$ ) superior à frequência do símbolo. Por essa razão um canal CDMA necessita uma larga banda de trabalho que, geralmente é partilhada por vários utentes; a cada utente é atribuído um código de entre um conjunto de códigos ortogonais ou quasi-ortogonais.

Um conjunto de utentes transmitindo na mesma banda através de códigos ortogonais e sem reflexões múltiplas não interferem entre eles, quer isto dizer que o desempenho do canal encontra-se apenas limitado pelo ruído e a interferência entre canais é nula (CCI=0). A utilização de códigos quasi-ortogonais por vezes é necessária, devido ao número limitado de códigos ortogonais disponíveis, ou em canais com caminhos múltiplos (caso mais frequente) faz com que a detecção da mensagem emitida seja, nesse caso, limitada pela interferência entre utentes.

### 9.2 Modelo do sinal

O modelo mais simplificado para o sinal recebido em CDMA no domínio do tempo é

$$x(t) = \sum_{q=1}^Q x_q(t) + n(t) \quad (9.1)$$

onde todos os termos tem uma óbvia interpretação e

$$x_q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_q(k)p_q(t - kT) + n_q(t) \quad (9.2)$$

onde  $s_q(k)$  representa a trama de bits (geralmente  $s(k) = \pm 1$ ),  $T$  é o intervalo de cada símbolo e  $p_q(t)$  é a resposta do canal à função formadora de pulso, *i.e.*, igual à convolução entre a resposta impulsiva do canal e a função formadora de pulso,

$$p_q(t) = h_q(t) * c_q(t) \quad (9.2)$$

onde  $h_q(t)$  é a resposta impulsiva do canal e  $c_q(t)$  é a função formadora de pulso que em CDMA implementa o código de espalhamento tal que

$$c_q(t) = \sum_{n=0}^{P-1} \gamma_q(n)g(t - nT_c) \quad (9.3)$$



onde  $P$  é o factor de espalhamento ou ganho de processamento,  $T_c = T/P$  é o ‘chip’ period,  $\{\gamma_q(n); n = 0, \dots, P - 1\}$  é o código de espalhamento do utente  $q$  e finalmente  $g(t)$  é a função de forma do ‘chip’. Para um canal formado por  $L$  caminhos múltiplos, poderemos aproximar a sua resposta impulsiva por

$$h_q(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{lq} \delta(t - \tau_{lq}) \quad (9.4)$$

onde o canal se encontra representado apenas pelo conjunto de atrasos  $\tau_{lq}$  e coeficientes de amplitude  $\alpha_{lq}$ .

### 9.3 Processamento só no domínio do tempo

A detecção do sinal emitido só no domínio do tempo faz-se fazendo passar o sinal recebido num conjunto de filtros adaptados, cada um deles ajustado para um utente. Assim a saída do filtro adaptado para o utente  $q$  escreve-se

$$r_q(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} x(t) p_q^*(t - kT) dt \quad (9.5)$$

#### 9.3.1 Caso do utente único

No caso do utente único pretende-se detectar um utente de entre  $Q$  sinais, considerados neste caso como ruído branco desconhecido. O sistema receptor-detector obtido neste caso é bastante simples e robusto (em termos de probabilidade de erro) mas tem como desvantagem de que é bastante sensível às diferenças de potência entre utentes. Vamos descrever duas estruturas de receptor para este caso.

**Correlador simples:** neste caso supõe-se que o canal tem apenas um caminho directo, *i.e.*, que  $p_q(t) = c_q(t)$  e assim (9.5) reduz-se a

$$r_q(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} x(t) c_q(t - kT) dt \quad (9.6)$$

e neste caso o detector decide qual a sequência de bits emitida através de um simples detector de nível. É conhecido que o detector simples é óptimo se as seguintes condições forem preenchidas:

a) que os códigos de espalhamento sejam ortogonais, *i.e.* que

$$\int_0^T c_i(t) c_j(t) dt = \delta_{ij} \quad (9.7)$$

b) que os símbolos sejam perfeitamente síncronos,

c) não existam caminhos múltiplos e

d) que o ruído seja aditivo, branco e Gaussiano.

Se pelo menos uma destas condições não se encontrar preenchida, o receptor será sub-óptimo. Na prática o correlador simples é utilizado quando os trajectos múltiplo são desprezíveis ou inexistentes.

**O receptor RAKE:** quando o canal apresenta trajectos múltiplos com espalhamento temporal superior a um período de chip  $T_c$  (que é relativamente pequeno) pode-se desenhar um receptor mais sofisticado. Note-se que o facto de existir trajectos múltiplos tem, em CDMA, um efeito que pode ser considerado negativo mas por vezes também positivo. Por um lado, introduz interferência entre caminhos múltiplos que se comporta como se fosse ISI em TDMA e/ou interferência entre utentes com códigos quasi-ortogonais. Por outro lado, o facto de o sinal recebido ser não correlado entre caminhos múltiplos introduz diversidade espacial que pode ser utilizado na detecção entre caminhos.

O receptor RAKE utiliza a diversidade espacial do sinal recebido ao longo dos vários trajectos múltiplos fazendo passar o sinal recebido por uma bateria de filtros adaptados, um para cada um dos caminhos; a saída dos filtros são em seguida combinadas num só filtro adaptado ao sinal com os respectivos atrasos de forma a aumentar a relação sinal/ruído. Assim podemos escrever a saída do receptor como a soma das  $L_q$  saídas de cada um dos filtros,

$$\begin{aligned} r_q(k) &= \int_{kT+\tau_1(q)}^{(k+1)T+\tau_2(q)} x(t)p_q^*(t-kT)dt \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{lq}^* \int_{kT+\tau_{lq}}^{(k+1)T+\tau_{lq}} x(t)c_q(t-kT-\tau_{lq})dt \end{aligned} \quad (9.8)$$

onde

$$\tau_1(q) = \min\{\tau_{lq}\} \quad \text{and} \quad \tau_2(q) = \max\{\tau_{lq}\} \quad (9.9)$$

Outras versões do receptor RAKE incluem o caso incoerente no qual a combinação das saídas dos diferentes filtros se faz depois de ter sido retirado o termo de fase, e também várias variantes de pesos de ponderação em amplitude permitindo assim obter receptores que maximizam a relação SNR ou SINR.

O receptor RAKE assume que o canal de transmissão, em particular os atrasos, as amplitudes e as fases para cada caminho são conhecidos; estes podem ser estimados através de tramas de treino ou ainda através do conhecimento apenas dos códigos de espalhamento. Esta é uma área de intensa investigação actualmente.

### 9.3.2 Caso multiutente

No caso multiutente, o problema complica-se, como era de esperar. O detector óptimo deverá satisfazer o seguinte critério

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = \arg \min_{\mathbf{s} \in \{-1,1\}} \int_{kT}^{(k+1)T} [x(t) - \sum_{q=1}^Q s_q(k)p_q(t-kT)]^2 \quad (9.10)$$

onde  $\mathbf{s}(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_Q(k)]^T$  e onde o ruído é, como sempre, suposto de tipo aditivo, branco e Gaussiano. O problema colocado por (9.10) tem uma complexidade exponencial com o número de utilizadores e requiere um conhecimento perfeito dos parâmetros característicos do canal de transmissão.

Outras implementações, sub-óptimas, mas computacionalmente mais simples, tentam determinar os bits da trama emitida a partir do detector CDMA do tipo

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = \text{dec} \{ \mathbf{T} \mathbf{r}(k) \} \quad (9.11)$$

onde *dec* significa que um detector de tipo clássico detector de nível, é utilizado no vector resultante do produto entre a saída do ‘matched-filter’ clássico  $\mathbf{r}(k)$  (mais precisamente bateria de ‘matched-filters’, um para cada utilizador, *i.e.*, cada canal) e a matriz de ponderação  $\mathbf{T}$ .

**Receptor convencional:** o receptor convencional de  $Q$  sinais num canal com ruído aditivo, branco e Gaussiano, obtem-se para  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ .

**Receptor descorrelador:** assumindo que não existe espalhamento temporal e que o sincronismo é perfeito podemos dizer que o sinal recebido se escreve

$$\mathbf{r} = \mathbf{P} \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (9.12)$$

onde os vectores são de dimensão  $Q$ , igual ao número de utilizadores e onde a matriz  $\mathbf{P}$  caracteriza a correlação entre canais, o que faz com que uma escolha natural para  $\mathbf{T}$  seja

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}. \quad (9.13)$$

Se a matriz  $\mathbf{P}$  for singular, deveremos utilizar o seu pseudo-inverso, *i.e.*  $\mathbf{T} = \mathbf{P}^\dagger$  onde se recorda que o pseudo-inverso não é mais do que

$$\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{U} \mathbf{D}_r^{-1} \mathbf{V}^H$$

onde  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{V}$  representam a decomposição em valores singulares de  $\mathbf{P}$  e  $r$  é a característica estimada de  $\mathbf{P}$ . O receptor dado por (9.11) com (9.13) é sub-óptimo visto que o ruído se encontra filtrado e por isso já não é branco. No entanto o ganho em termos computacionais é apreciável e faz com que este receptor seja bastante utilizado na prática.

**Receptor MEMQ:** como no caso dos equalizadores temporais, o método dos MEMQ pode ser utilizado para reduzir o ruído. Neste caso prova-se que cada linha da matriz  $\mathbf{T}$  pode ser calculada como

$$\mathbf{t}_q^H = [E\{\mathbf{r}(k)\mathbf{r}(k)^H\}]^{-1} E\{\mathbf{r}(k)\bar{s}_q(k)^*\} \quad (9.14)$$

onde todos os termos foram definidos e  $\bar{s}_q(k)$  é uma trama de treino. Estudos recentes demonstram que este receptor é relativamente robusto e que permite obter resultados superiores aqueles obtidos com o receptor ‘matched-filter’. A sua desvantagem é de necessitar o envio de tramas de treino, o

que faz dele um potencial candidato para os métodos de detecção temporal sem tramas de treino que vamos passar em revista no capítulo seguinte.

### 9.3.3 Receptores sem tramas de treino

O conceito de métodos sem tramas de treino significa, em geral, que as tramas enviadas são desconhecidas do receptor mas (e isto é particularmente importante em CDMA) o código utilizado pelo emissor é conhecido do receptor. Neste caso foram apresentados resultados que demonstram ser possível estimar a matriz  $\mathbf{T}$  utilizando uma técnica tipo MEMQ mas na qual são evitadas as sequências de treino e apenas são conhecidos os códigos de espalhamento atribuídos a cada utilizador para estimação do respectivo canal de transmissão.

Devemos também notar que a forma (9.12) (obtida para o caso sem espalhamento temporal) é em tudo semelhante à forma só espacial tratada no capítulo 6.3.1 e por essa razão todos os métodos ali discutidos são, com as definições apropriadas, aplicáveis aqui.

## 9.4 Processamento espacio-temporal em CDMA

A recepção do sinal na base numa antena com receptores múltiplos vem adicionar uma nova dimensão ao problema, tomando o modelo a seguinte forma

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{x}_q(t) + \mathbf{n}(t) \quad (9.15)$$

onde os vectores são agora de dimensão  $m \times 1$  onde  $m$  é, como habitualmente o número de receptores na antena da base. A contribuição do utente  $q$  escreve-se

$$\mathbf{x}_q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_q(t) \mathbf{p}_q(t - kT) \quad (9.16)$$

onde agora o vector canal é dado pelo produto de convolução

$$\mathbf{p}_q(t) = \mathbf{h}_q(t) * c_q(t) \quad (9.17)$$

onde  $c_q(t)$  é o código de espalhamento para o utente  $q$  e  $\mathbf{h}_q(t)$  é o vector resposta impulsiva do canal entre o utente  $q$  e cada um dos receptores da antena dado, no caso em que cada caminho é representado por um coeficiente de amplitude e um atraso, por

$$\mathbf{h}_q(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{lq} \mathbf{a}_{lq} \delta(t - \tau_{lq}) \quad (9.17)$$

Podemos então constatar que neste caso, o facto de termos uma antena com vários receptores na base apenas multiplicou o caso do receptor único pelo número de receptores  $m$ . Neste caso a saída de um receptor correlador ajustado para o canal  $i$  escreve-se para o utente  $q$

$$r_{iq} = \int_{kT}^{(k+1)T} x_i(t) p_{iq}^*(t - kT) dt \quad (9.18)$$

cujo conjunto para  $i = 1, \dots, m$  e  $q = 1, \dots, Q$  constitui uma estatística suficiente para o processamento espacio-temporal. Um dos resultados, recentemente publicado é uma adaptação espacio-temporal do receptor RAKE discutido no caso de processamento só temporal para o caso do utente único.

Neste caso utiliza-se um ‘matched-filter’ espacio-temporal ajustado no espaço através de um ‘beamformer’ na direcção do vector espacial  $\mathbf{a}_{lq}$  e ajustado no tempo de acordo com o código de espalhamento do utente desejado  $q$ . Assim o código estimado escreve-se

$$\hat{s}_q = dec \left\{ \sum_{l=1}^L \alpha_{lq} \int_{kT+\tau_{lq}}^{(k+1)T+\tau_{lq}} \mathbf{a}_{lq}^H x(t) c_q(t - kT - \tau_{lq}) dt \right\} \quad (9.19)$$

Um melhor resultado poderá ser obtido através de um beamformer MEMQ seguido por um receptor RAKE convencional no tempo.

## 9.5 CDMA na transmissão base-móvel

Como no caso TDMA e FDMA, o processamento de sinal no caso base-móvel em CDMA tem como objectivo minimizar a interferência gerada para outros utentes, maximizando a potência gerada para o utente desejado. Em CDMA no entanto, o problema da interferência entre utentes intra-célula é simplificado devido ao uso de códigos de espalhamento ortogonais ou quasi-ortogonais. Por isso o problema do processamento é quase só devido ao espalhamento espacial (angular) que além de trazer dificuldades na separação dos utentes por código (que deixa de ser ortogonal) produz uma forte perda e induz espalhamento temporal associado. No entanto, se for utilizado FDD, então o canal directo e de retorno podem ser considerados idênticos. Na prática, o processamento espacial é utilizado no emissor para atacar cada um dos caminhos múltiplos com o devido sinal (ou réplica do sinal) e teóricamente com a devida compensação de atraso de forma a que o sinal através dos caminhos múltiplos chegue em fase ao receptor contribuindo para um maior ganho de SNR, SINR e qualidade de sinal.

## 10. Aplicações do processamento espacio-temporal

### 10.1 “Switched-beam systems”

O sistema switched-beams (SBS) consiste num formador de feixes (beamformer) localizado no andar de rádio frequência que forma feixes em torno à antena receptora e determina automaticamente quais os dois feixes com maior SINR. A recepção através desses feixes reduz efectivamente a interferência e aumenta o ganho do sinal, e portanto a qualidade da transmissão. Óbvio que o ganho proporcionado por SBS depende da direccionalidade do sinal, da topologia da antena, dos reflectores em torno à base e finalmente do espalhamento angular do sinal.

### 10.2 Filtragem espacio-temporal

A filtragem espacio-temporal consiste um pouco em tudo o que foi dito até aqui acerca da utilização do domínio espacial conjuntamente com o temporal para melhorar a recepção do sinal. Somos aqui levados a recordar as noções de convolução e transformação dos sinais no domínio espaço-tempo discutidas em 2.4. A partir daí podemos imaginar a construção de um filtro no mesmo domínio que pretenda filtrar direcções, privilegiando outras para certas frequências, etc... São em geral filtros com grande complexidade cuja implementação tem que ser rentabilizada na prática o que é por vezes discutível.

### 10.3 Reutilização intra-célula

Trata-se aqui de um sonho tornado realidade: em TDMA e FDMA pode ser atribuído o mesmo slot temporal ou frequencial desde que os utentes estejam suficientemente angularmente separados. É uma consequência directa da possibilidade do processamento espacial na base, que permite aumentar a capacidade do sistema de comunicação através da separação espacial dos canais: este sistema é por vezes chamado SDMA = space division multiple access.

## Referências

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions*. U.S. Government Printing Office, 1968.
- [2] D.H Johnson and D.E. Dudgeon, *Array Signal Processing*, Prentice Hall, New Jersey, 1993.
- [3] H. Krim and M. Viberg, “Two Decades of Array Signal Processing: the parametric approach.”, *Signal Processing Magazine*, pp. 67-94, Julho 1966.
- [4] L.L. Scharf, *Statistical Signal Processing*, Addison-Wesley, 1991.
- [5] J.G. Proakis, “Digital Communications”, Third Ed., McGraw-Hill, 1995.
- [6] R.O. Schmidt, “A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation”, Ph.D. dissertation, Stanford University, 1981.
- [7] A. Paulraj, R. Roy e T. Kailath, “Estimation of signal parameters via rotational invariant techniques - ESPRIT”, *Proc. XIXth Asilomar Conf. on Circuits Systems and Computers*, pp. 83-89, Pacific Grove, CA, 1985.
- [8] J.P. Burg, “Maximum Entropy Spectral Analysis”, PhD Dissertation, Stanford, 1975.

## Teórico-Práticas - Folha no. 1

### Iniciação às Comunicações com MATLAB Parte I: modulação AM

#### I. Preparação

##### I.1 Modulação

Uma portadora de frequência central  $f_c$  e amplitude  $A_c$  é modulada em amplitude por um sinal  $m(t)$  quando se escreve

$$u(t) = A_c[1 + am_n(t)] \cos(2\pi f_c t) \quad (1)$$

$0 \leq a \leq 1$  é o índice de modulação e  $m_n(t)$  é o sinal modulador normalizado por

$$m_n(t) = m(t) / \max |m(t)| \quad (2)$$

1. Provar que a potência do sinal modulado se escreve

$$P_u = \frac{A_c^2}{2}(1 + a^2 P_{m_n}) \quad (3)$$

onde  $P_{m_n}$  é a potência do sinal modulador normalizado que é suposto de média nula.

2. Supondo que o sinal recebido se encontra perturbado por ruído do tipo aditivo branco, de média nula e de variância  $\sigma^2$ , demonstre que a relação sinal/ruído, SNR se escreve

$$SNR = \eta \frac{P_R}{2\sigma^2 W} \quad (4)$$

onde  $P_R$  é a potência do sinal modulado recebido no receptor,  $W$  é a largura da banda e

$$\eta = \frac{a^2 P_{m_n}}{1 + a^2 P_{m_n}} \quad (5)$$

é a eficiência de modulação, *i.e.*, o rácio entre a potência necessária para transmitir a mensagem e a potência total transmitida no sinal modulado.

3. determine o espectro do sinal modulado.

##### I.2 Desmodulação



A desmodulação de sinais modulados em AM faz-se através de um simples detector de envelope. Um detector de envelope tem a vantagem prática de não necessitar o conhecimento da fase da portadora o que simplifica enormemente o circuito necessário que pode simplesmente ser constituído por um diodo em série com uma resistência em paralelo com um condensador. O envelope da portadora não é mais do que a amplitude da componente passa-baixo do sinal modulado, *i.e.*, a amplitude do sinal modulador.

Qualquer sinal passa-banda  $u(t)$  se pode escrever como

$$u(t) = u_f(t) \cos(2\pi f_c t) - u_q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (6)$$

onde  $u_f$  e  $u_q$  são sinais passa-baixo, componentes em fase e em quadratura de  $u(t)$ . Assim o envelope de  $u(t)$  é

$$a(t) = \sqrt{u_f^2(t) + u_q^2(t)} \quad (7)$$

1. Explicar qual o procedimento para extrair as componentes em fase e quadratura do sinal passa-banda  $u(t)$ .
2. A partir da noção de sinal anlítico  $z(t) = u(t) + \bar{u}(t)$  onde  $\bar{u}(t)$  é a transformada de Hilbert de  $u(t)$  explicar como se pode extrair o envelope de  $u(t)$ .

## II. Trabalho prático

Considere o sinal

$$m(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < t_0/3 \\ -2 & t_0/3 \leq t < 2t_0/3 \\ 0 & \text{para todo outro } t \end{cases} \quad (8)$$

com  $t_0 = 0.15$  e que modula uma portadora de frequência  $f_c = 250$  Hz, com  $A_c = 2$  e índice de modulação  $a = 0.85$ .

Com a ajuda do Matlab :

- a) realize a modulação AM de uma portadora de frequência  $f_c$ , amplitude  $A_c$  e índice de modulação  $a$ .
- b) calcule as potências do sinal modulador, do sinal modulado e a eficiência de modulação
- c) calcule os espectros do sinal modulador e do sinal modulado
- d) adicione ruído aditivo, branco de média nula e de variância de acordo com um SNR=10 dB.
- e) determine o sinal desmodulado  $\hat{m}(t)$  a partir do sinal modulado sem e com ruído de transmissão.
- f) para  $-10 \leq \text{SNR} \leq 20$  dB trace  $\epsilon = |\hat{m}(t) - m(t)|$ .

## Teórico-Práticas - Folha no. 2

Iniciação às Comunicações com MATLAB  
Parte II: modulação analógica não linear

### I. Preparação

#### I.1 Modulação FM

Uma portadora

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \quad (1)$$

de frequência central  $f_c$  e amplitude  $A_c$  é modulada em frequência (FM) por um sinal  $m(t)$  quando se escreve

$$u(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi\beta_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau] \quad (2)$$

onde  $\beta_f$  é a constante de modulação e  $m(t)$  é o sinal modulador. Em geral define-se um índice de modulação como sendo

$$k_f = \frac{\beta_f \max |m(t)|}{W} \quad (3)$$

onde  $W$  é a largura de banda de  $m(t)$ .

#### I.2 Modulação PM

A mesma portadora que em (1) diz-se modulada em ângulo (phase modulation) se o sinal modulado se escreve

$$u(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_a m(t)] \quad (4)$$

onde  $\beta_a$  é a constante de modulação em fase, que se encontra ligada ao índice de modulação por

$$k_a = \beta_a \max |m(t)| \quad (5)$$

### II. Trabalho prático

#### II.1 Modulação FM

Utilizando o mesmo sinal modulador que no TP 1 implementar

a) uma modulação FM com  $k_f = 50$  e  $f_c = 200$  Hz. Mostrar os sinais modulador e modulado no tempo e na frequência.

b) desmodular o sinal de a) sem ruído.

c) fazer a mesma desmodulação com um nível de ruído variável entre -10 e 20 dB e calcular o erro de transmissão como  $\epsilon = |\hat{m}(t) - m(t)|^2$  em função do SNR.

## II.2 Modulação PM

Sempre com o mesmo sinal  $m(t)$  implementar em Matlab

a) uma modulação PM com  $k_a = 50$  e  $f_c = 200$  Hz. Mostrar os sinais modulador e modulado no tempo e na frequência.

b) desmodular o sinal de a) sem ruído.

c) fazer a mesma desmodulação com um nível de ruído variável entre -10 e 20 dB e calcular o erro de transmissão como  $\epsilon = |\hat{m}(t) - m(t)|^2$  em função do SNR.

## Teórico-Práticas - Folha no. 3

### Sinalização e Detecção em banda base

#### I. Preparação

##### I.1 O problema

A transmissão de uma trama de bits requiere, a escolha dos sinais representativos dos símbolos '0' e '1' - chama-se a isto o processo de sinalização. Vamos supôr que é feita a seguinte sinalização

$$0 \rightarrow s_0(t) \quad (1a)$$

$$1 \rightarrow s_1(t) \quad (1b)$$

no intervalo  $0 \leq t \leq T_b$  onde  $T_b$  é o intervalo de amostragem da trama de bits, i.e.,  $T_b = 1/f_b$ , onde  $f_b$  é a cadência de amostragem da trama de bits. A sequência temporal obtida é modulada, transmitida e na recepção deverá ser efectuada uma detecção, de cada sinal  $s_i(t)$  enviado e a ele associado um bit  $i$ . Vamos supor que o canal de transmissão é de tipo aditivo e que o ruído pode ser representado por uma sequência aleatória branca e Gaussiana. Assim, o sinal recebido  $y(t)$  pode-se escrever

$$y(t) = s_i(t) + n(t) \quad (2)$$

O problema no receptor consiste em, com o mínimo erro possível, e partindo de  $\{y(t), 0 \leq t \leq T_b\}$  determinar se um bit '0' ou um bit '1' foi emitido.

##### I.2 O receptor óptimo

No caso do problema acima exposto, o receptor óptimo é o receptor-correlador ou 'matched-filter'. O receptor-correlador é constituído por dois blocos: um multiplicador e um integrador. O receptor-correlador (que no caso binário é constituído por dois correladores) implementa a seguinte operação no sinal de entrada

$$r_i(t) = \int_0^t y(\tau) s_i(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (3)$$

Quando o sinal  $s_0(t)$  é transmitido obtem-se

$$r_0(t) = A + n_0 \quad (4a)$$

$$r_1(t) = A_{12} + n_1 \quad (4b)$$

e quando  $s_1(t)$  é transmitido

$$r_0(t) = A_{12} + n_0 \quad (5a)$$

$$r_1(t) = A + n_1 \quad (5b)$$

onde se supõe

$$A = \int_0^{T_b} s_0^2(t) dt = \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt \quad \text{e} \quad A_{12} = \int_0^{T_b} s_1(t) s_0(t) dt$$

e ainda que

$$n_i = \int_0^{T_b} n(t) s_i(t) dt$$

Dado que  $n(t)$  é uma sequência aleatória, branca, Gaussiana de média nula e de variância  $\sigma^2$ , temos que  $n_i$  será também branca e Gaussiana com média

$$E[n_i] = \int_0^{T_b} s_i(t) E[n(t)] dt = 0 \quad (6)$$

e variância

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= E[n_i^2] \\ &= \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_i(t) s_i(\tau) E[n(t) n(\tau)] dt d\tau \\ &= \sigma^2 \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_i(t) s_i(\tau) \delta(t - \tau) dt d\tau \\ &= \sigma^2 \int_0^{T_b} s_i^2(t) dt \\ &= \sigma^2 A \end{aligned} \quad (7)$$

e assim, temos que as densidades de probabilidade de  $r_0$  e  $r_1$  quando por exemplo  $s_0(t)$  é transmitido se escrevem

$$\text{respectivamente, e } (7a)$$

$$(7b)$$

respectivamente, e

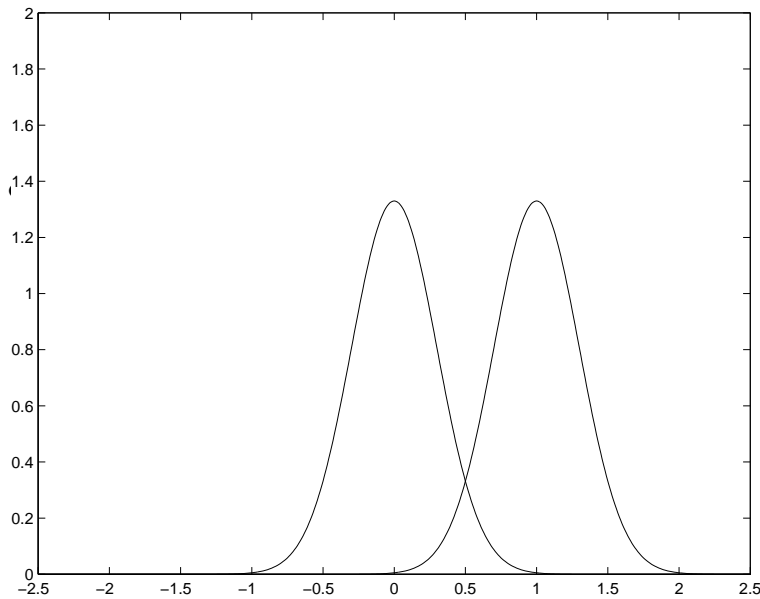


Figura 1: densidades de probabilidade para  $r_0$  e  $r_1$  quando  $s_0(t)$  é transmitido

Óbviamente no caso contrário em que  $s_1(t)$  é transmitido, temos que  $r_0$  terá média  $A_{12}$  e  $r_1$  de média  $A$ , sendo ambas as distribuições de variância  $\sigma^2 A$ .

### I.3 O 'matched-filter'

O 'matched-filter' do sinal  $\{s(t), 0 \leq t \leq T_b\}$  é um sistema cuja resposta impulsiva é  $s(T_b - t)$ . Assim, a resposta do 'matched-filter' ao sinal  $s(t)$  é a convolução de  $s(t)$  com  $s(T_b - t)$ , i.e.,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t s(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^t s(\tau)s(T_b - t + \tau)d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

Se a saída de  $x(t)$  for amostrada no instante  $T_b$ , temos que

$$x(T_b) = \int_0^{T_b} s^2(\tau)d\tau = A \quad (9)$$

podendo-se concluir que a saída do 'matched-filter' amostrado à cadência da trama de bits é igual à saída do receptor-correlador.

### I.4 O Detector

O detector é um dispositivo que observa a saída do receptor-correlador ou 'matched-filter' e decide qual dos dois símbolos, '0' ou '1', foi transmitido. Pretende-se, óbviamente, que este processo de decisão tenha o menor erro possível. A probabilidade de erro,  $P_e$ , quando p.ex.  $s_0$  é transmitido, escreve-se como sendo a probabilidade de decidir que  $r_1$  foi recebido quando na realidade foi  $r_0$ , assim podemos dizer que

$$P_e = Prob(r_1 > r_0) = Prob(n_1 + A_{12} > A + n_0) = Prob(n_1 - n_0 > A - A_{12}) \quad (10)$$

e como  $n_1$  e  $n_0$  são variáveis aleatórias Gaussianas, de média nula, a sua diferença,  $x = n_1 - n_0$  também é Gaussiana de média nula. A variância de  $x$  pode-se calcular através de

$$E[x^2] = E[(n_1 - n_0)^2] = E[n_1^2] + E[n_2^2] - 2E[n_1 n_0] \quad (11)$$

onde  $E[n_i^2] = A\sigma^2$  e

$$\begin{aligned} E[n_1 n_0] &= \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_0(t)s_1(\tau)E[n(t)n(\tau)]dtd\tau \\ &= \sigma^2 \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} s_0(t)s_1(\tau)\delta(t - \tau)dtd\tau \\ &= \sigma^2 \int_0^{T_b} s_0(t)s_1(t)dt \\ &= \sigma^2 A_{12} \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente

$$E[x^2] = \sigma_x^2 = 2\sigma^2(A - A_{12}) \quad (13)$$

de onde, utilizando a eq. (10), podemos escrever a probabilidade de erro como

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{A-A_{12}}^{+\infty} e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx \quad (14)$$

fazendo uma mudança de variável  $u = x/\sigma_x$  obtemos

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{A-A_{12}}{2\sigma^2}}}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = Q\left(\sqrt{\frac{A-A_{12}}{2\sigma^2}}\right) \quad (15)$$

### I.5 Sinais ortogonais, antipodais e on-off

No processo de sinalização vários conjuntos de sinais podem ser utilizados e as características dos receptor-correlador/matched-filter serão em cada caso diferentes. Dois sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  são ditos ortogonais no intervalo  $[0, T]$  se

$$\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt = 0$$

Dois sinais são ditos antipodais se

$$s_0(t) = -s_1(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

O tipo de codagem on-off é tal que, p.ex., sejam associados os seguintes sinais

$$0 \rightarrow \text{sem sinal}$$

$$1 \rightarrow s(t)$$

o que significa que o sinal recebido é do tipo

$$y(t) = \begin{cases} n(t) & \text{um '0' é transmitido} \\ s(t) + n(t) & \text{um '1' é transmitido} \end{cases} \quad (16)$$

Se um sistema de transmissão utilizar sinais ortogonais temos que  $A_{12} = 0$  o que implica que as médias das densidades de probabilidade  $p(r_1/s_0)$  e  $p(r_0/s_1)$  são ambas nulas. No caso dos sinais antipodais temos que essas mesmas densidades são de média  $-A$  e por isso a diferença média entre as duas densidades é aumentada. As funções de erro são modificadas da mesma forma.

Se em vez disso utilizarmos uma codagem on-off, temos que as distribuições são semelhantes à do caso dos sinais ortogonais, a probabilidade de erro é portanto mais elevada do que no caso antipodal mas temos a considerar que existe um ganho de 2 na potência a transmitir, visto que só

é transmitido um sinal em cada 2 bits, em média se um bit '0' tiver a mesma probabilidade que um bit '1'.

## I.6 Sinalização multinível

A técnica mais utilizada em transmissão de informação através de modulação de impulsos (PAM), é chamada sinalização multinível e tem como particularidade utilizar uma única forma de impulso que toma um nível diferente (dentro de um número de níveis finito possíveis) para cada símbolo a transmitir. No caso geral temos um sinal do tipo

$$s_m(t) = A_m g(t), \quad 0 \leq t \leq T_s, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (17)$$

onde as amplitudes  $A_m$  são dadas por

$$A_m = (2m - M + 1)d, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (18)$$

$g(t)$  é um impulso rectangular e o número de níveis  $M$  é dado por  $M = 2^k$ ,  $k$  inteiro. O período  $T_s$  é geralmente chamado 'symbol rate' enquanto o 'bit rate'  $T_b$  é dado por  $T_b = T/k$ , i.e., a sinalização multiníveis permite enviar  $k$  vezes mais informação que um método de sinalização simples. O que nos interessa aqui porém, é a forma do sistema detector óptimo, se ele existe. Na verdade existe, pelo menos para o caso de ruído branco e Gaussiano, e é dado pelo receptor-correlador ou matched-filter tal como no caso do nível simples. É fácil de provar que a saída do receptor-correlador para o sinal de nível  $s_i(t)$  é

$$r(t) = A_i + n(t) \quad (19)$$

enquanto a densidade de probabilidade se escreve

$$p(r|s_i(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -[(r - A_i)^2/2\sigma^2] \quad (20)$$

onde  $A_i$  é um dos valores de entre os  $M$  possíveis. Prova-se neste caso que a probabilidade de erro do detector PAM óptimo de  $M$  níveis se escreve

$$P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{(6 \log_2 M) A_{avg}}{(M^2-1)\sigma^2}}\right) \quad (21)$$

onde  $A_{avg}$  é a energia média de um bit de informação.

## II. Trabalho prático

### II.1 Correlador-receptor vs. matched-filter

Considere os dois sinais

$$s_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & t \notin [0, T_b] \end{cases}$$



$$s_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_b/2 \\ -1 & T_b/2 \leq t \leq T_b \\ 0 & t \notin [0, T_b] \end{cases}$$

- a) construa um receptor-correlador com  $T_b = 1$  s, e teste a sua saída com os sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  em todas as combinações possíveis.
- b) compare o resultado obtido em a) com uma implementação tipo matched-filter.
- c) adicionando ruído à entrada do receptor-correlador ou matched-filter observar o sinal de saída.

## II.2 Sinais ortogonais

- a) provar que os sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  do exercício anterior são ortogonais.
- b) simular um canal de transmissão de uma trama de bits aleatória com a mesma probabilidade para o '0' e os '1' utilizando os sinais  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$ . Fazer variar a relação sinal/ruído  $SNR = A/\sigma^2$  entre -10 e +20 dB e traçar a curva  $P_e(SNR)$ . Comparar com a curva teórica. Quantas tiragens aleatórias são necessárias para obter uma boa aproximação ?
- c) construa um diagrama de constelação com os pares  $(r_0, r_1)$  à saída do receptor-correlador ou matched-filter para um número significativo de símbolos da trama de bits e para várias relações de SNR. Explicar o efeito obtido.

## II.3 Sinais antipodais

Escolher um conjunto de sinais antipodais como, p.ex.,  $s_1(t)$  e  $-s_1(t)$  do exercício anterior.

Responder de novo às alíneas b) e c) de II.2 utilizando uma sinalização antipodal.

## II.4 Sinalização do tipo on-off

Volte a responder ao mesmo problema dos dois exercícios anteriores mas utilizando uma sinalização do tipo on-off com o sinal  $s_1(t)$ . Compare os três tipos de sinalização.

## II.5 Sinalização multinível

Realizar uma simulação de um sistema PAM, com  $M=16$  e faça uma estimativa do seu desempenho em termos de probabilidade de erro vs. SNR.

## Teórico-Práticas - Folha no. 4

Tranmissão de sinais PAM em canais de banda limitada

### I. Preparação

A modulação por impulsos *Pulse Amplitude Modulation*(PAM) foi utilizada no trabalho anterior para transmitir sinais em banda base nos quais as únicas perturbações sofridas eram devidas ao ruído. Neste trabalho vamos estudar as modificações sofridas pelo mesmo tipo de sinais mas transmitidos num canal cuja banda é limitada. Para começar é necessário definir qual o espectro de um sinal PAM.

#### I.1 O espectro de um sinal PAM

Um sinal PAM à entrada de um canal de comunicações pode ser representado por

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \quad (1)$$

onde os  $\{a_n\}$  são o conjunto de amplitudes que representam os símbolos de informação,  $g(t)$  é a função formadora de pulso e  $T$  é o período do símbolo. Óbviamente vamos supor, como no caso multinível do trabalho anterior, que os níveis  $a_n$  são seleccionados de entre  $M$  níveis possíveis de acordo com

$$a_m = (2m - M + 1)d; \quad m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (2)$$

onde  $d$  representa um factor de escala, que determina a distância euclidiana entre dois níveis contíguos, que se encontram neste caso separados por  $2d$ . No caso geral  $\{a_n\}$  é uma sequência aleatória e por isso  $v(t)$  é um processo aleatório do qual deveremos calcular o espectro.

1. prove que a densidade espectral do processo  $v(t)$  se escreve

$$S_v(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G(f)|^2 \quad (3)$$

onde  $S_a(f)$  é o espectro da sequência  $a_n$  e  $G(f)$  é a TF de  $g(t)$ .

#### I.2 Canal de banda limitada

Em geral, a resposta em frequência do canal atravessado pelo sinal pode colocar-se sob a forma

$$C(f) = A(f) e^{j\theta(f)} \quad (4)$$

onde  $A(f)$  é geralmente chamada amplitude e  $\theta(f)$  a fase. Por vezes em vez da fase é utilizado o atraso de envelope que se pode escrever como

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df} \quad (5)$$

É sabido que se  $A(f)$  é constante e  $\theta(f)$  é linear numa dada banda de frequências, então diz-se que o canal não introduz distorção nessa banda. O resultado de um espectro de amplitude não constante ou de uma fase não linear é que uma sucessão de impulsos transmitidos através desse canal vão-se encontrar deformados em amplitude e possivelmente sobrepostos na recepção, daí o efeito chamado interferência inter simbólica (ISI). Na realidade o canal pode nesse caso ser, em muitos casos, representado por um filtro. No receptor a ISI pode, no caso de canais não ideais, ser compensada através de um dispositivo chamado equalizador que por sua vez não é mais do que um filtro “inverso” ao do canal destinado a compensar os seus efeitos.

### I.3 Interferência intersimbólica

Vamos agora supôr que um sinal PAM dado por (1) é transmitido (em banda base para simplificar) através de um canal de resposta em frequência  $C(f)$  dado por (4). Assim podemos escrever o sinal recebido

$$r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h(t - nT) + w(t) \quad (6)$$

onde  $h(t) = g(t) * c(t)$ , sendo  $c(t) = TFI[C(F)]$  a resposta impulsiva do canal de transmissão. Vamos agora considerar o caso ideal no qual o receptor se encontra perfeitamente ajustado em relação ao canal e que o sinal recebido é por isso “matched-filtered” com uma função  $H(f)^* = TF[h(-t)]$ , tal que o sinal à saída do receptor é

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x(t - nT) + v(t) \quad (7)$$

onde  $x(t)$  é tal que  $X(f) = H(f)H^*(f) = |H(f)|^2$  e o ruído filtrado  $v(t) = h(-t) * w(t)$ . Se agora a saída do correlador for amostrada a uma cadência  $1/T$ , temos

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x(kT - nT) + v(kT) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_{k-n} + v_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

fazendo nesta expressão  $x_0 = 1$ , o que não altera o resultado, podemos chegar à expressão,

$$y_k = a_k + \sum_{n=0; n \neq k}^{+\infty} a_n x_{k-n} + v_k \quad (9)$$

onde podemos ver fácilmente que o primeiro termo  $a_k$  é o símbolo desejado ao instante  $k$ , enquanto o segundo termo representa a interferência dos outros símbolos e portanto a ISI. Em geral, para que um determinado sistema tenha uma ISI igual a zero, é condição necessária e suficiente, (critério de Nyquist) que

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

o que é equivalente a dizer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f + mT) = T \quad (11)$$

O sinal mais utilizado em comunicações que obedece à propriedade (11) é a função “raised cosine”, definida por

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} T, & 0 \leq |f| \leq (1 - \alpha)/2T \\ \frac{T}{2[1 + \cos \frac{\pi T}{\alpha} (|f| - \frac{1-\alpha}{2T})]} & \frac{1-\alpha}{2T} < |f| < \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (12)$$

onde  $\alpha$  é o factor de “roll-off”, tal que  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Neste caso a condição para que a ISI seja zero é que

$$G_T(f)G_R(f) = X_{rc}(f) \quad (13)$$

onde  $G_T(f)$  e  $G_R(f)$  são as respostas em frequência do filtro de transmissão e de recepção, respectivamente.

#### I.4 Equalizadores lineares

A função do equalizador é, como o seu nome indica, compensar a distorsão imposta pelo canal de transmissão de tal forma a equalizar a função de transferência global entre o emissor e o receptor.

Figura 1

Figura 1: diagrama de blocos do sistema de transmissão com o equalizador

A posição do equalizador encontra-se representada no diagrama da figura 1, de onde se pode deduzir tendo em conta o que foi dito no capítulo anterior que para obter uma ISI nula deveremos ter

$$G_T(f)C(f)G_R(f)G_E(f) = X_{rc}(f) \quad (14)$$

e visto que segundo (13),  $G_T(f)G_Rf = X_{rc}(f)$  então

$$G_E(f) = \frac{1}{C(f)} = \frac{1}{|C(f)|} e^{-j\theta(f)} \quad (15)$$

trata-se pois de um equalizador do tipo “zero-forcing” que obriga a resposta a ter ISI igual a zero a todos os instantes  $k = 0, 1, \dots$ , e nesse caso a saída do equalizador será, a partir de (9), apenas  $z_k = a_k + v_k$ . Geralmente a ISI não poderá ser completamente anulada para todos os valores de  $k$ , tendo em conta que o equalizador deverá ser implementado por um filtro FIR com um número finito de termos, e por isso, o objectivo é mais o de obter uma ISI limitada do que forçá-la a zero. Esse objectivo corresponde a ter um número finito de termos no somatório da eq. (9). Um equalizador linear é realizado praticamente graças a um sistema como o representado na figura 2.

Figura 2

Figura 2: equalizador linear transversal

A resposta impulsiva de um tal equalizador pode ser

$$g_E(t) = \sum_{n=-K}^K c_n \delta(t - n\tau) \quad (16)$$

onde  $K$  é o comprimento do equalizador, os  $\{c_n\}$  são os coeficientes de ponderação e  $\tau$  é o atraso entre cada célula do filtro. Em geral,  $K$  é escolhido como sendo  $\geq$  ao número máximo de amostras de ISI a compensar (equalisar) e  $\tau$  é determinado em função do intervalo entre símbolos  $T$ , *i.e.*,  $\tau \leq T$ , geralmente  $\tau = T/2$ .

- a) determine a resposta em frequência do equalizador linear (16)
- b) determine o sinal de saída do equalizador  $q(mT)$  aos instantes  $mT$ , sabendo que a sua entrada é  $x(t)$
- c) sabendo que a condição “zero-forcing” impõe

$$q(mT) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K \end{cases} \quad (17)$$

escrever o sistema de equações entre  $x$ , os  $c_n$  e  $q$  que permite calcular os coeficientes do filtro conhecendo  $x$ .

## 2. Trabalho prático

### 2.1 Canal com distorsão de amplitude

Com a ajuda do MATLAB, determine a resposta impulsiva de um filtro cuja resposta em frequência é

$$|A(f)| = \begin{cases} 1 & |f| \leq 2 \text{ kHz} \\ 0 & |f| > 2 \text{ kHz} \end{cases} \quad (6)$$

e com uma fase linear na banda passante, e uma frequência de amostragem  $f_s = 10$  kHz.

- a) que tipo de filtros se poderá utilizar ?
- b) quais as aproximações necessárias para implementar (6) (em termos de atenuação na banda de corte e largura da banda de transição).
- c) para cada um dos casos possíveis na implementação do filtro determine a resposta impulsiva e faça o gráfico da função de transferência obtida (amplitude e fase).

### 2.2 Interferência intersimbólica

- a) com ajuda do MATLAB calcular e representar a função “raised-cosine” no tempo e na frequência para vários factores de “roll-off”.
- b) determinar a resposta impulsiva e em frequência do filtro de transmissão que permitam obter uma ISI nula aos instantes de amostragem do simbolo para um canal de transmissão perfeito, i.e.,  $|A(f)| = 1$  e  $\angle A(f) = 0$ .
- c) para o mesmo canal de transmissão determinar a resposta em frequência da cascata dos filtros de transmissão,  $G_T(f)$ , de recepção,  $G_R(f)$  e do canal de transmissão  $A(f)$ .

## Teórico-Práticas - Folha no. 5

### Controlo da Interferência Intersimbólica e Equalizadores Lineares

#### I. Preparação

A modulação por impulsos *Pulse Amplitude Modulation*(PAM) foi utilizada no trabalho anterior para transmitir sinais em banda base nos quais as únicas perturbações sofridas eram devidas ao ruído. Neste trabalho vamos estudar as modificações sofridas pelo mesmo tipo de sinais mas transmitidos num canal cuja banda é limitada. Para começar é necessário definir qual o espectro de um sinal PAM.

##### I.1 O espectro de um sinal PAM

Um sinal PAM à entrada de um canal de comunicações pode ser representado por

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \quad (1)$$

onde os  $\{a_n\}$  são o conjunto de amplitudes que representam os símbolos de informação,  $g(t)$  é a função formadora de pulso e  $T$  é o período do símbolo. Óbviamente vamos supor, como no caso multinível do trabalho anterior, que os níveis  $a_n$  são selecionados de entre  $M$  níveis possíveis de acordo com

$$a_m = (2m - M + 1)d; \quad m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (2)$$

onde  $d$  representa um factor de escala, que determina a distância euclidiana entre dois níveis contíguos, que se encontram neste caso separados por  $2d$ . No caso geral  $\{a_n\}$  é uma sequência aleatória e por isso  $v(t)$  é um processo aleatório do qual deveremos calcular o espectro.

1. prove que a densidade espectral do processo  $v(t)$  se escreve

$$S_v(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G(f)|^2 \quad (3)$$

onde  $S_a(f)$  é o espectro da sequência  $a_n$  e  $G(f)$  é a TF de  $g(t)$ .

##### I.2 Canal de banda limitada

Em geral, a resposta em frequência do canal atravessado pelo sinal pode colocar-se sob a forma

$$C(f) = A(f) e^{j\theta(f)} \quad (4)$$

onde  $A(f)$  é geralmente chamada amplitude e  $\theta(f)$  a fase. Por vezes em vez da fase é utilizado o atraso de envelope que se pode escrever como

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df} \quad (5)$$

É sabido que se  $A(f)$  é constante e  $\theta(f)$  é linear numa dada banda de frequências, então diz-se que o canal não introduz distorsão nessa banda. O resultado de um espectro de amplitude não constante ou de uma fase não linear é que uma sucessão de impulsos transmitidos através desse canal vão-se encontrar deformados em amplitude e possivelmente sobrepostos na recepção, daí o efeito chamado interferência inter simbólica (ISI). Na realidade o canal pode nesse caso ser, em muitos casos, representado por um filtro. No receptor a ISI pode, no caso de canais não ideais, ser compensada através de um dispositivo chamado equalizador que por sua vez não é mais do que um filtro “inverso” ao do canal destinado a compensar os seus efeitos.

### I.3 Interferência intersimbólica

Vamos agora supôr que um sinal PAM dado por (1) é transmitido (em banda base para simplificar) através de um canal de resposta em frequência  $C(f)$  dado por (4). Assim podemos escrever o sinal recebido

$$r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h(t - nT) + w(t) \quad (6)$$

onde  $h(t) = g(t) * c(t)$ , sendo  $c(t) = TFI[C(F)]$  a resposta impulsiva do canal de transmissão. Vamos agora considerar o caso ideal no qual o receptor se encontra perfeitamente ajustado em relação ao canal e que o sinal recebido é por isso “matched-filtered” com uma função  $H(f)^* = TF[h(-t)]$ , tal que o sinal à saída do receptor é

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x(t - nT) + v(t) \quad (7)$$

onde  $x(t)$  é tal que  $X(f) = H(f)H^*(f) = |H(f)|^2$  e o ruído filtrado  $v(t) = h(-t) * w(t)$ . Se agora a saída do correlador for amostrada a uma cadência  $1/T$ , temos

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x(kT - nT) + v(kT) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_{k-n} + v_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

fazendo nesta expressão  $x_0 = 1$ , o que não altera o resultado, podemos chegar à expressão,

$$y_k = a_k + \sum_{n=0; n \neq k}^{+\infty} a_n x_{k-n} + v_k \quad (9)$$



onde podemos ver fácilmente que o primeiro termo  $a_k$  é o símbolo desejado ao instante  $k$ , enquanto o segundo termo representa a interferência dos outros símbolos e portanto a ISI. Em geral, para que um determinado sistema tenha uma ISI igual a zero, é condição necessária e suficiente, (critério de Nyquist) que

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

o que é equivalente a dizer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f + mT) = T \quad (11)$$

O sinal mais utilizado em comunicações que obedece à propriedade (11) é a função “raised cosine”, definida por

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} T, & 0 \leq |f| \leq (1 - \alpha)/2T \\ \frac{T}{2[1 + \cos \frac{\pi T}{\alpha} (|f| - \frac{1-\alpha}{2T})]} & \frac{1-\alpha}{2T} < |f| < \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (12)$$

onde  $\alpha$  é o factor de “roll-off”, tal que  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Neste caso a condição para que a ISI seja zero é que

$$G_T(f)G_R(f) = X_{rc}(f) \quad (13)$$

onde  $G_T(f)$  e  $G_R(f)$  são as respostas em frequência do filtro de transmissão e de recepção, respectivamente.

#### I.4 Equalizadores lineares

A função do equalizador é, como o seu nome indica, compensar a distorsão imposta pelo canal de transmissão de tal forma a equalizar a função de transferência global entre o emissor e o receptor.

Figura 1

Figura 1: diagrama de blocos do sistema de transmissão com o equalizador

A posição do equalizador encontra-se representada no diagrama da figura 1, de onde se pode deduzir tendo em conta o que foi dito no capítulo anterior que para obter uma ISI nula deveremos ter

$$G_T(f)C(f)G_R(f)G_E(f) = X_{rc}(f) \quad (14)$$

e visto que segundo (13),  $G_T(f)G_Rf = X_{rc}(f)$  então

$$G_E(f) = \frac{1}{C(f)} = \frac{1}{|C(f)|} e^{-j\theta(f)} \quad (15)$$

trata-se pois de um equalizador do tipo “zero-forcing” que obriga a resposta a ter ISI igual a zero a todos os instantes  $k = 0, 1, \dots$ , e nesse caso a saída do equalizador será, a partir de (9), apenas  $z_k = a_k + v_k$ . Geralmente a ISI não poderá ser completamente anulada para todos os valores de  $k$ , tendo em conta que o equalizador deverá ser implementado por um filtro FIR com um número finito de termos, e por isso, o objectivo é mais o de obter uma ISI limitada do que forçá-la a zero. Esse objectivo corresponde a ter um número finito de termos no somatório da eq. (9). Um equalizador linear é realizado praticamente graças a um sistema como o representado na figura 2.

Figura 2

Figura 2: equalizador linear transversal

A resposta impulsiva de um tal equalizador pode ser

$$g_E(t) = \sum_{n=-K}^K c_n \delta(t - n\tau) \quad (16)$$

onde  $K$  é o comprimento do equalizador, os  $\{c_n\}$  são os coeficientes de ponderação e  $\tau$  é o atraso entre cada célula do filtro. Em geral,  $K$  é escolhido como sendo  $\geq$  ao número máximo de amostras de ISI a compensar (equalisar) e  $\tau$  é determinado em função do intervalo entre símbolos  $T$ , *i.e.*,  $\tau \leq T$ , geralmente  $\tau = T/2$ .

- a) determine a resposta em frequência do equalizador linear (16)
- b) determine o sinal de saída do equalizador  $q(mT)$  aos instantes  $mT$ , sabendo que a sua entrada é  $x(t)$
- c) sabendo que a condição “zero-forcing” impõe

$$q(mT) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K \end{cases} \quad (17)$$

escrever o sistema de equações entre  $x$ , os  $c_n$  e  $q$  que permite calcular os coeficientes do filtro conhecendo  $x$ .

## 2. Trabalho prático

### 2.1 Interferência intersímbolica Controlada

a) com ajuda do MATLAB calcular e representar a função “raised-cosine” no tempo e na frequência para vários factores de “roll-off”.

b) determinar a resposta impulsiva e em frequência do filtro de transmissão que permitam obter uma ISI nula aos instantes de amostragem do simbolo para um canal de transmissão perfeito, i.e.,  $|A(f)| = 1$  e  $\angle A(f) = 0$ .

c) para o mesmo canal de transmissão determinar a resposta em frequência da cascata dos filtros de transmissão,  $G_T(f)$ , de recepção,  $G_R(f)$  e do canal de transmissão  $A(f)$ .

### 2.2 Equalizadores lineares

a) considere um sinal  $x(t)$  à entrada de um equalizador linear

$$x(t) = \frac{1}{1 + (2t/T)^2}$$

onde  $1/T$  é a taxa de transmissão de símbolo. Utilizando um equalizador do tipo “zero-forcing” a uma taxa de equalização igual a  $2/T$  determinar os coeficientes  $c_n$  de um filtro equalizador de dimensão  $K = 5$ .